Problem četiri boje

Iva Gregurić, Antoaneta Klobučar*

Sažetak. *U ovom članku pokušat ćemo približiti učenicima srednjih škola jedan od zanimljivijih problema u matematici, opisati njegovu povijest, navesti neke matematičare koji su zaslužni za dokazivanje ovog teorema te na nekoliko primjera demonstrirati primjenu teorema o četiri boje.*

Ključne riječi: *bojanje grafa, bojanje karte, planarni graf*

Four colors problem

Abstract. *In this article we present to high-school students one of the most interesting mathematical problems, tell its history, mention some mathematical significant for its proving, and give some examples of* 4*-coloring.*

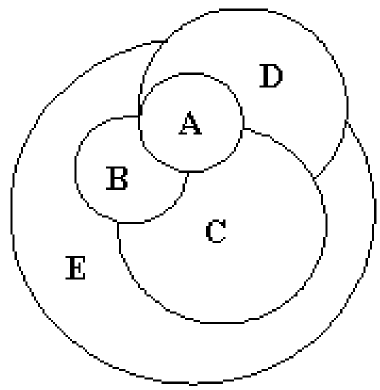
Key words: *graph-coloring, map-coloring, planar graph*

O čemu se radi?

Zamislimo u ravnini ili na sferi zemljopisnu kartu na kojoj su ucrtane države. Svaka država sastoji se samo od jedne regije na karti, a ne od više nepovezanih područja.[1] Da bismo razlikovali države, želimo ih obojiti tako da države sa zajedničkim granicama budu obojene različitim bojama. Na slici 1. označili smo različitim slovima različite boje:

*Odjel za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, igreguri@mathos.hr, aneta@efos.hr

[1] Ovdje se pretpostavlja da su zemlje kompaktne regije, tako da se ne promatraju slučajevi kod kojih postoje područja koja nisu susjedna a pripadaju istoj regiji. Na primjer, Aljaska kao dio USA, Kaliningrad kao dio Rusije i slično.



Slika 1.

Problem se sastoji u tome da se nađe najmanji broj boja koji će jamčiti da se svaka takva "zemljopisna karta" može obojiti na tako zadan način. Problem se može jednostavno formulirati i razumljiv je i školarcima tako da je godinama predstavljao izazov kako matematičarima, tako i amaterima.

Kako je sve započelo?

Davne 1852. godine matematičar Francis Guthrie, tada na postdiplomskom studiju u Londonu, bojio je na karti engleske grofovije. Ubrzo je uočio da mu nije potrebno više od četiri boje. Zapitao se jesu li četiri boje dovoljne za svaku kartu i ako jesu što je uzrok tome, no nije mogao doći do rješenja. Bilješke na kojima je radio poslao je po bratu Fredericku profesoru Augustusu De Morganu, koji je i njemu predavao na sveučilištu, i pitao za uzrok toj činjenici. Profesor nije znao i pitanje je proslijedio dalje, kolegi Hamiltonu u Dublin. U pismu je stajalo otprilike ovo:

> "Student je tražio uzrok činjenice za koju nisam ni znao da je činjenica - i još uvijek ne znam. Rekao je da su nam, ukoliko neki crtež bilo kako razdijelimo i dijelove obojimo tako da su susjedni dijelovi različito obojeni, potrebne najviše četiri boje. Ne mogu naći primjer u kojem je potrebno pet boja... Ako mi nađeš jednostavan primjer, mislim da ću morati učiniti što i Sfinga..."

Sir Hamilton, međutim, nije bio zainteresiran. Možda zbog pogrešnog shvaćanja kako se problem svodi na dokazivanje nemogućnosti da pet regija dijele zajedničku granicu. No problem je kompliciraniji.

Istaknuti britanski matematičar Arthur Cayley predložio je 1878. godine isti problem Londonskom matematičkom društvu i samo godinu dana kasnije, Arthur Bray Kempe objavio je članak u kojem je tvrdio da je pretpostavku dokazao. Ovaj dokaz bio je prihvaćen sve do 1890.godine kada je P. J. Heawood pronašao grešku. On je tad dokazao da se svaka karta može obojati sa pet boja. Taj dokaz je relativno jednostavan, no dokaz da je za to potrebno samo četiri boje je bio nešto sasvim drugo.

Mnogi matematičari i amateri su na njemu radili godinama, neki čak i cijeli svoj životni vijek, no do rješenja nisu mogli doći. A problem je sročen tako jednostavno da se pretpostavljalo da će jednog dana netko pronaći elegantno rješenje. No dogodilo se nešto drugačije.

Godine 1976. napokon je došlo do preokreta. Koristeći Kempeove tvrdnje o reducibilnosti i algoritam Heescha, Kenneth Appel i Wolfgang Haken sa Sveučilišta Illinois uspjeli su dokazati pretpostavku uz pomoć računala. Beskonačan broj mogućih karti reduciran je na $1,936$ koje je računalo moralo provjeriti jednu po jednu. Trebalo je oko $1,200$ sati samo rada računala. Tada je po drugi put problem četiriju boja dobio status teorema. Ovaj dokaz izazvao je brojne rasprave među matematičarima. To je prvi veći teorem koji je dokazan računalno, čovjek ga ne može provjeriti i ne nudi nikakav novi uvid u problem. Nedostatak elegancije bio je još jedan razlog. Komentar toga vremena koji najbolje opisuje mišljenje velikog dijela matematičara glasi:

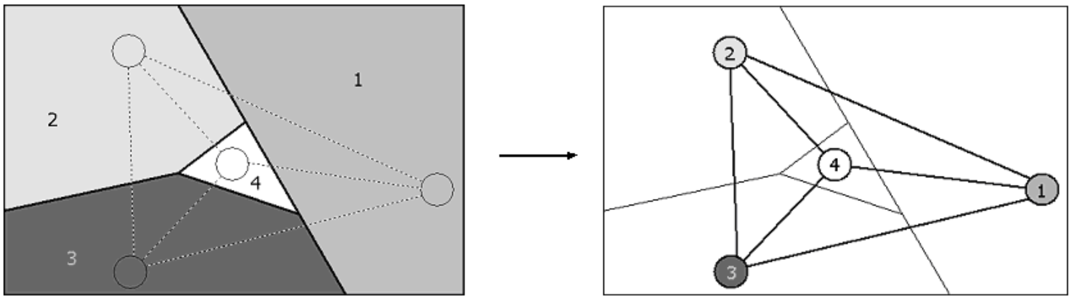
"Dobar matematički dokaz je kao pjesma - ovo je telefonski imenik!"

Godine 1997. Robertson, Sanders, Seymour i Thomas objavili su jednostavniji dokaz na 40 stranica tako što su reducirali broj mogućih karti na 633, ali također rabeći računalo.

Prevedeno na matematički...

Kako bismo formalno izrekli teorem koristimo postavke teorije grafova. Za početak ćemo definirati neke pojmove. Graf G je uređeni par nepraznih skupova V,E i Φ_G pri čemu je V skup vrhova grafa, E skup bridova i Φ_G funkcija incidencije koja svakom bridu iz G pridružuje neuređen par vrhova od G. Pišemo $G = (V(G), E(G), \Phi_G)$, a često i kraće $G = (V, E)$. Vrhove prikazujemo kao kružiće, a bridove kao linije koje povezuju vrhove (kružiće).

Planarni (ravninski) graf je graf koji se može nacrtati u ravnini tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima. Očito je da se od svake karte može konstruirati planarni graf. Regije tada zamjenjuju vrhovi, a dva vrha spajamo bridom ako su regije koje odgovaraju vrhovima susjedne. Naglasimo - regije su susjedne ako se dodiruju nekom dužinom, a ne samo u jednoj točki.



Na slici vidimo kako je svaka regija karte zamijenjena vrhom grafa, a dva vrha su povezana ako i samo ako imaju zajedničku granicu (ne samo jednu točku).

Slika 2.

Tako se problem bojanja regija svodi na problem bojanja vrhova planarnog grafa tako da nikoja dva susjedna vrha nemaju istu boju.

Sada ćemo dokazati da je svaki planarni graf 5 - obojiv. U dokazu ćemo koristiti još dva teorema koje ćemo samo navesti bez dokazivanja.

Teorem 1. *U planarnom grafu postoji barem jedan vrh stupnja manjeg od 6 (susjedan je sa najviše 5 drugih vrhova).*

Teorem 2. *Graf je planaran, ako i samo ako u sebi ne sadrži potpuni pentagraf* K_5 *(graf od 5 vrhova koji su svaki sa svakim susjedni) ili* $K_{3,3}$ *(graf od 6 vrhova koji su grupirani u dvije skupine od po 3, tako da u istoj skupini nikoja dva nisu susjedna, a susjedni su sa svakim iz druge skupine).*

Teorem 3. *Svaki planarni graf je 5 - obojiv.*

Dokaz. Za grafove sa malim brojem vrhova može se neposredno provjeriti. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za grafove sa manje od n vrhova i promatrajmo planarni graf G sa n vrhova. Na osnovu Teorema 1. graf sadrži najmanje jedan vrh stupnja ne većeg od 5. Neka je to vrh x. Ako je vrh x stupnja manjeg od 5 postupa se na sljedeći način. Vrh x se udalji iz grafa G sa svojim bridovima. Dobiveni graf je na osnovu induktivne pretpostavke 5 - obojiv. Vratimo sad vrh x nazad u graf. Za bojenje vrhova susjednih vrhu x treba najviše 4 boje, te x možemo obojiti jednom od preostalih boja.

Promatrajmo sada slučaj kad je x vrh stupnja 5. Neka su a,b,c,d,e vrhovi susjedni vrhu x. Na osnovu Teorema 2. vrhovi a,b,c,d,e ne tvore potpuni pentagraf u G: Stoga bar jedan par vrhova nije povezan bridom. Neka su to na primjer vrhovi a i c. Udaljimo iz grafa G bridove (x, b),(x, d) i (x, e).

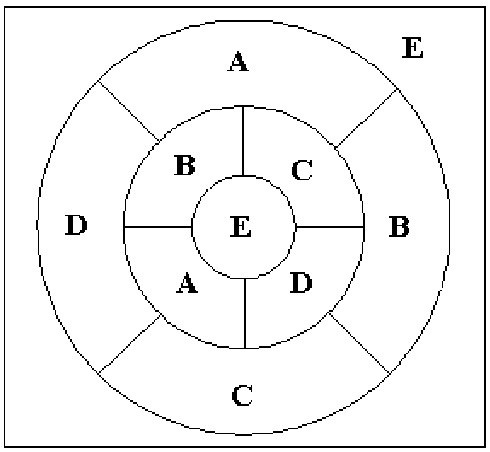
Sada udaljimo i bridove (x, a) i (x, c), a sve bridove koje dolaze do vrhova a i c produžimo do vrha x kojeg ćemo sa označiti sa x^*. Time smo izbacili vrhove a i c iz grafa. Tako dobiveni graf se može po induktivnoj pretpostavci obojiti sa 5 boja.

Bojenje novonastalog grafa određuje bojanje i grafa G. Naime pošto vrhovi a i c nisu susjedni dobijaju boju vrha x^*. Za bojanje vrhova b,d,e potrebne su najviše tri boje (koje su određene bojanjem grafa kojeg smo dobili izbacivanjem vrhova a i c). Za bojanje vrha x treba još jedna boja. Time je teorem dokazan. $\square$

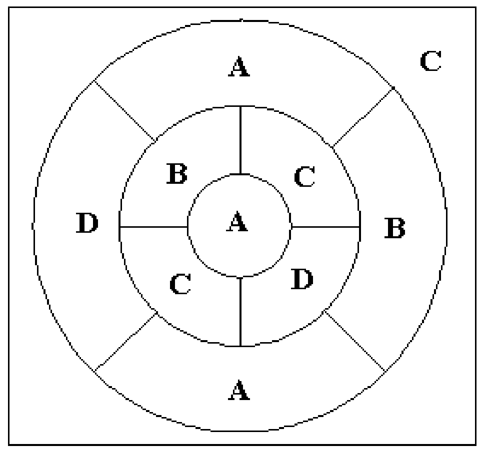
Kao što je već navedeno 2.1.1976. dokazan je sljedeći teorem:

Teorem 4. *Svaki planarni graf je 4 - obojiv.*

Tijekom vremena pojavio se velik broj pogrešnih dokaza i opovrgavanja Teorema 4. Najjednostavniji kontra-primjeri sastoje se u tome da se pokuša nacrtati regija koja dodiruje sve ostale regije. Tako bismo ostale regije morali obojiti sa samo tri boje. Budući da je teorem o četiri boje točan to je uvijek moguće. No, budući da je osoba koncentrirana na jednu veliku regiju, promakne joj da je preostale regije moguće obojiti sa samo tri boje.



Jedan od kontra-primjera...



...koji to zapravo nije

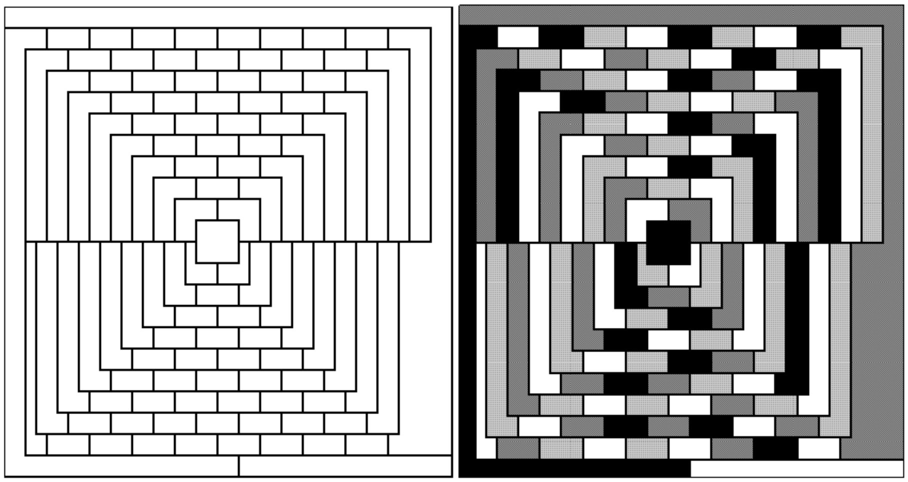
Slika 3.

Tako je na Slici 3. prikazan slučaj za koji na prvi pogled treba najmanje 5 boja da bi se obojao, no zapravo su potrebne samo četiri boje.

Ovaj način možemo generalizirati. Postoje brojne karte na kojima, ako unaprijed odaberemo boje nekih regija, postaje nemoguće sa samo četiri boje sve obojiti. Jedna od čestih pogrešaka pri tome je činjenica da restrikcija boja nije tranzitivna tj.regija mora biti različite boje od regija koje direktno dodiruje, nego regija koje dodiruju regije koje dodiruje. U suprotnom trebalo bi nam puno više od četiri boje.

Druga vrsta kontra-primjera krši pretpostavku teorema tako što koristi regiju koja se sastoji od dijelova koji se međusobno ne dodiruju ili ne dopušta da se različito oboje regije koje se dodiruju u samo jednoj točki.

Jedan od pokušaja pobijanja teorema o četiri boje (u smislu prvoaprilske šale) izveo je Martin Gardner tvrdeći da kartu sa 110 regija (Slika 4.) možemo obojiti s najmanje pet boja. Pomoću računala je dokazano da ta tvrdnja nije točna.



Problem Rješenje

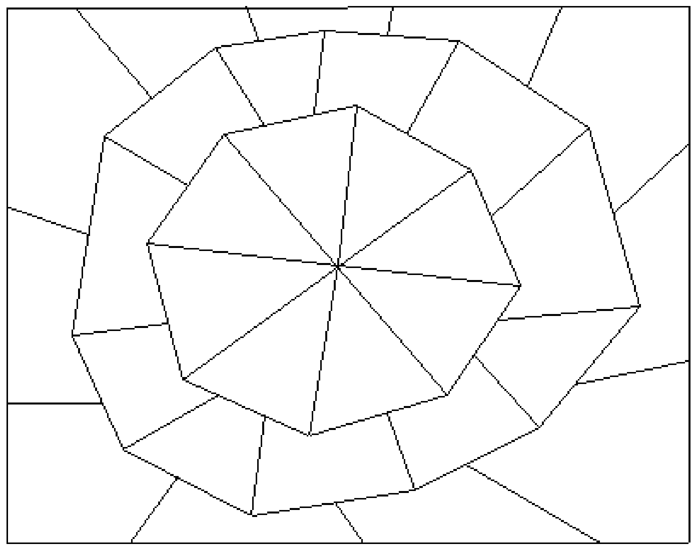
Slika 4.

Zaključak

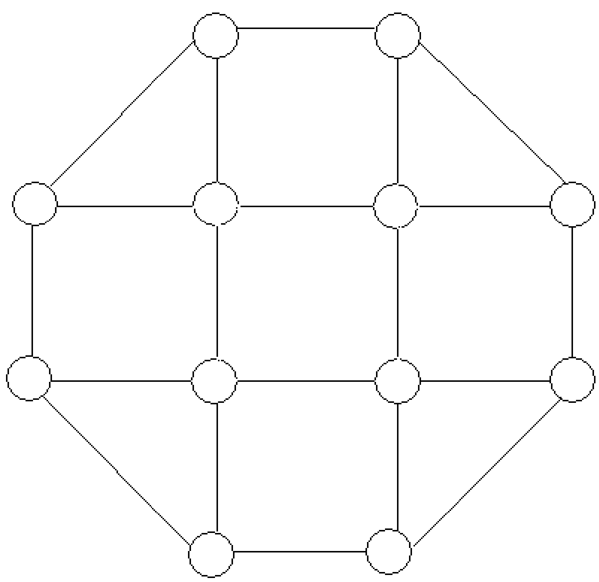
Važnost teorema o četiri boje najveća je u matematici. Jednostavnost i elegancija postavljene tvrdnje izazvala je opći interes kako među matematičarima, tako i među amaterima. Rastao je interes za matematiku i otkrivene su brojne druge tvrdnje i teoremi.

Nastale su nove grane matematike. Teorem o četiri boje doprinio je posebno razvoju kombinatorike, preciznije teorije grafova.

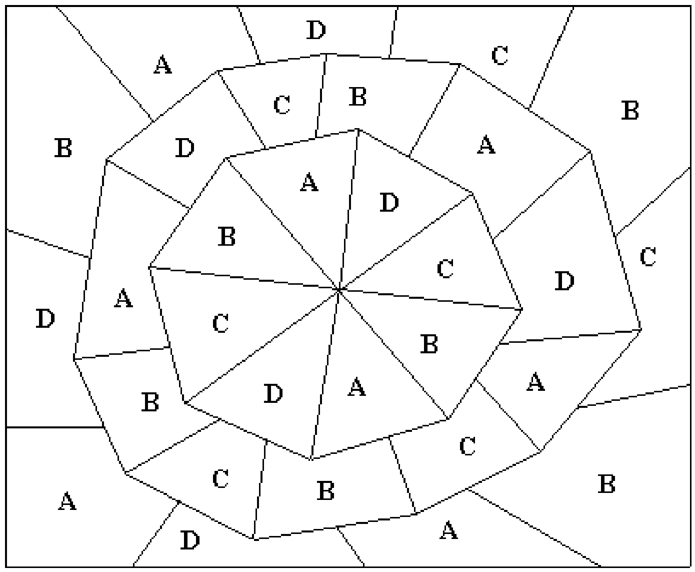
Zadatak 1. *Pokušajte obojiti ovu kartu sa samo četiri boje*



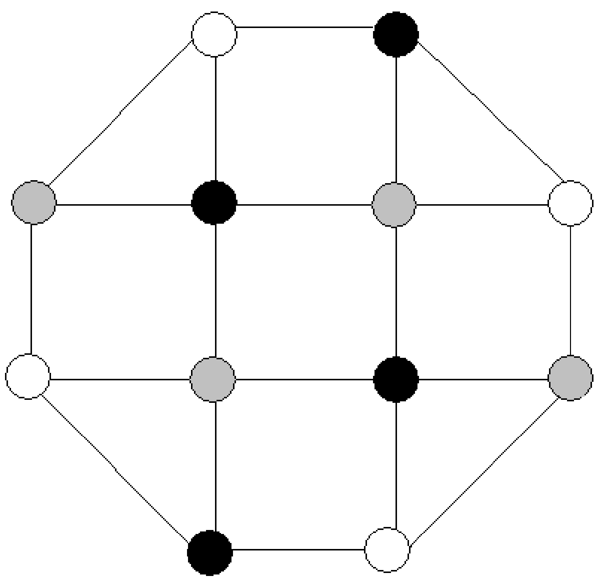
Zadatak 2. *Obojite vrhove grafa tako da susjedni vrhovi budu različite boje. Možete li obojiti graf sa samo tri boje?*



Rješenja zadataka:



Zadatak 1.


Zadatak 2.

Literatura

[1] D. BLANUŠA, *Problem četiriju boja, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Ser. II. 1(1946)*

[2] D. VELJAN, *Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb 1989.*

[3] D. VELJAN, *Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.*

[4] J. GROSS, J. YALLEN, *Graph Theory and its applications, CRC, 1999.*

[5] P. J. DAVIS, R. HERSH, E. A. MARCHISOTTO, *Doživljaj matematike, Tehnička knjiga, Zagreb 2002.*

[6] `http://web.math.hr/hmd/logo.htm`

[7] `http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html`

[8] `http://www.math.utah.edu/~pa/math/4color.html`

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/Fourcolortheorem`