

STUDENTSKA RUBRIKA

Metode izračunavanja determinanti matrica n -tog reda

DAMIRA KEČEK*

Sažetak. U članku su opisane metode izračunavanja determinanti matrica n -tog reda. Svaka od njih je ilustrirana primjerima.

Ključne riječi: determinante, algebarski komplement, Laplaceov razvoj determinante

Methods of computing determinants of the n -th order

Abstract. In the paper are described methods of computing determinants of the n -th order. Each of them is illustrated by examples.

Key words: determinants, cofactor, Laplace expansion of the determinant

1. Uvod

Determinantu kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n definiramo kao broj

$$\det A = \sum (-1)^{i(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$$

gdje $p(1), p(2), \dots, p(n)$ prolaze svih $n!$ mogućih permutacija brojeva $1, 2, \dots, n$. Predznak svakog sumanda u $\det A$ ovisi o broju inverzija u permutaciji, $i(p)$, tj. o broju situacija kad u permutaciji vrijedi $i < j$ i $p(i) > p(j)$.

Determinantu matrice obično označavamo sa

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Veleučilište u Varaždinu Jurja Križanića 33, 42000 Varaždin, damira.kecek@velv.hr

Ako je $n = 1$, $\det A = |a| = a$.

Za $n = 2$ imamo $2! = 2$ permutacije, $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kako je $i(p_1) = 0$, a $i(p_2) = 1$ imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Za $n = 3$ račun postaje kompliciraniji, imamo $3! = 6$ permutacija,

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} \\ + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \\ = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \\ - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

Primijetimo da računanje determinante pomoću definicije nije jednostavno. Zato postoje razne metode kojima se determinanta brže izračuna, a najopćenitija metoda je Laplaceov razvoj determinante.

Laplaceov razvoj determinante može se provoditi po bilo kojem retku ili stupcu matrice. Neka je A matrica reda n . Ako u toj matrici izostavimo i -ti redak i j -ti stupac dobit ćemo matricu čiju determinantu zovemo subdeterminanta ili minora i označavamo sa M_{ij} .

Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Laplaceov razvoj po i -tom retku:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Laplaceov razvoj po j -tom stupcu:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Zadatak 1. Izračunajte determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ Laplaceovim

razvojem po

a) trećem retku,

b) drugom stupcu.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \\
 &+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 3 \cdot [0 - (-8)] - 5 \cdot [-1 - (-12)] + 1 \cdot (4 - 0) \\
 &= -27.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &+ 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 0 + 4 \cdot [1 - (-6)] - 5 \cdot [-1 - (-12)] \\
 &= -27.
 \end{aligned}$$

Kod računanja determinante matrice najbolje je izabrati onaj redak ili stupac koji sadrži najviše nula jer je tada račun kraći.

Navedimo sada neka svojstva determinanti koja ćemo koristiti u izračunavanju determinanti višeg reda:

1. Dodamo (oduzmemo) li nekom retku (stupcu) elemente nekog drugog retka (stupca) ili njihovu linearnu kombinaciju, vrijednost determinante se ne mijenja.
2. Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog njenog retka (stupca) brojem c , tada je $\det(B) = c \cdot \det(A)$.
3. Ako se neki redak ili stupac matrice sastoji samo od nula, determinanta te matrice jednaka je nuli.
4. Ako je A trokutasta matrica, tada joj je determinanta jednaka produktu elemenata njezine glavne dijagonale.
5. Ako su u matrici dva retka (stupca) proporcionalna, determinanta joj je jednaka nuli.
6. Zamjenom dvaju stupaca determinanta mijenja predznak.

7. Neka se matrice A i B razlikuju samo u elementima i -tog retka (stupca). Suma determinanti $\det(A) + \det(B)$ je determinanta čiji je i -ti redak (stupac) suma odgovarajućih članova i -tih redova (stupaca) u $\det(A)$ i $\det(B)$, a ostali elementi su jednaki odgovarajućim elementima tih determinanti.
8. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tada vrijedi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Binet-Cauchyjev teorem).

2. Metode izračunavanja determinanti matrica n -tog reda

2.1. Svođenje matrice na trokutasti oblik

Ova metoda se sastoji u transformiranju matrice transformacijama sličnosti u oblik u kojem su svi elementi s jedne strane glavne dijagonale matrice jednaki nuli. Tada primjenom Cauchy–Binetove formule slijedi da je vrijednost determinante matrice jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali.

Zadatak 2. *Izračunajte determinantu*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 1 & 2 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Pomnožimo prvi redak sa -1 i dodamo drugom, trećem, ..., n -tom, to nam daje

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 1 & 2 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 2 - x_{12} & x_{23} - x_{13} & \dots & x_{2n} - x_{1n} \\ 0 & 2 - x_{12} & 3 - x_{13} & \dots & x_{3n} - x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 - x_{12} & 3 - x_{13} & \dots & n - x_{1n} \end{vmatrix}$$

nastavimo li analogno postupak, tj. pomnožimo drugi redak sa -1 i dodamo trećem, četvrtom, ..., n -tom, i tako sve do $(n-1)$. retka, dobivamo

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 2 - x_{12} & x_{23} - x_{13} & \dots & x_{2n} - x_{1n} \\ 0 & 0 & 3 - x_{23} & \dots & x_{3n} - x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n - x_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= (2 - x_{12}) \cdot (3 - x_{23}) \cdot \dots \cdot (n - x_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Zadatak 3. *Izračunajte determinantu*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Pomnožimo prvi redak sa $-x_1$ i dodamo drugom, pomnožimo prvi redak sa $-x_2$ i dodamo trećem, ..., pomnožimo prvi redak sa $-x_n$ i dodamo n -tom retku.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -y_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -y_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -y_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

= razvoj po $(n+1)$. stupcu

$$= (-1)^{1+n+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & \dots & -y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -y_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ -y_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n+1} \cdot (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & \dots & y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ y_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

= u ovoj determinanti će "preživjeti" jedino sumand koji odgovara permutaciji

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n.$$

2.2. Metoda promjene elemenata u determinanti

Neka je $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ determinanta kvadratne matrice A , a

$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$ determinanta u kojoj svakom elementu

determinante D dodamo broj x . Primjenom svojstva 7, rastavimo determinantu \tilde{D} po prvom retku na zbroj dvije determinante, zatim svaku od njih rastavimo na zbroj dvije determinante po drugom retku, analogno nastavimo rastavljati dalje od trećeg do n -tog retka. Determinante s dva ili više redaka koji se sastoje samo od elemenata x , jednake su nuli prema svojstvu 5, a nad one koje sadrže jedan redak s elementima x primijenimo svojstvo 2 i razvijemo Laplaceovim pravilom po tom retku. Imamo

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}}_{=0}$$

=dalje nastavljamo analogno rastavljati od 3. do n -tog retka=

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ x & x & \dots & x \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D + \sum_{i=1}^n x \cdot \sum_{j=1}^n A_{ij} = D + x \cdot \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} .

Zadatak 4. Izračunajte determinantu $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$.

Rješenje: $D_n = \begin{vmatrix} (1-n)+n & 0+n & 0+n & \dots & 0+n & 0+n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0+n & (2-n)+n & 0+n & \dots & 0+n & 0+n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}}_{=0}$$

Nastavimo li analogno postupak rastavljanja determinanti, dobivamo

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} \quad = \text{primjena svojstva 4} \\ &= (1-n)(2-n)\cdots(-1)\cdot n \\ &= (-1)^{n-1} \cdot n!. \end{aligned}$$

Zadatak 5. Izračunajte determinantu $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Rješenje: } D_n &= \begin{vmatrix} (x-y)+y & 0+y & 0+y & \dots & 0+y & 0+y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-y \end{vmatrix} + y \cdot \sum_{i,j=1}^n \hat{A}_{ij} \\
&= (x-y)^n + y \cdot \sum_{i,j=1}^n \hat{A}_{ij} \\
&= \begin{cases} \hat{A}_{ij} = 0, & \text{za } i \neq j \\ \hat{A}_{ii} = (-1)^{i+i} \cdot \begin{vmatrix} x-y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} \end{cases} = (x-y)^{n-1}, \quad \text{za } i = j \\
&= (x-y)^n + y \cdot n \cdot (x-y)^{n-1} \\
&= (x-y)^{n-1} [x + y \cdot (n-1)].
\end{aligned}$$

2.3. Metoda rekurzivnih relacija

Neka je

$$D_n = pD_{n-1} + rD_{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (1)$$

dvočlana rekurzija s konstantnim koeficijentima.

Razlikujemo 2 slučaja:

1. $r = 0$, onda je

$$D_n = pD_{n-1} = p(pD_{n-2}) = p^2D_{n-2} = \dots = p^{n-1}D_1. \quad (2)$$

2. $r \neq 0$

Rekurziji (1) pridružujemo karakteristični polinom $k(x) = x^2 - px - r$. Neka su x_1 i x_2 korijeni karakteristične jednadžbe $x^2 - px - r = 0$.

Imamo slučajeve:

(a) $x_1 \neq x_2$, onda je

$$D_n = k_1x_1^n + k_2x_2^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

gdje se konstante k_1 i k_2 odrede pomoću poznatih D_1 i D_2 , tj.

$$k_1 = \frac{D_2 - x_2D_1}{x_1(x_1 - x_2)}, \quad (4)$$

$$k_2 = -\frac{D_2 - x_1 D_1}{x_2(x_1 - x_2)}. \quad (5)$$

(b) $x_1 = x_2$, onda je

$$D_n = x_1^{n-1} D_1 + (n-1)x_1^{n-2}(D_2 - x_1 D_1), n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Zadatak 6. *Izračunajte determinantu:*

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Rješenje: } D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \{\text{razvoj po 1. retku}\}$$

$$= 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot D_{n-1} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \{\text{razvoj po 1. stupcu}\}$$

$$= 5 \cdot D_{n-1} - 4 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot D_{n-1} - 4D_{n-2},$$

$$D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 21.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe $x^2 - 5x + 4 = 0$ su $x_1 = 4$ i $x_2 = 1$.

Pomoću formula (4) i (5) odredimo koeficijente k_1 i k_2 koje uvrstimo u formulu (3)

zajedno sa rješenjima x_1 i x_2 . Konačno slijedi

$$D_n = \frac{4}{3} \cdot 4^n + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}.$$

Literatura

- [1] K. HORVATIĆ, *Linearna algebra*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1999.
- [2] I.V. PROSKURYAKOV, *Problems in Linear Algebra*, Mir, Moskva, 1978.