

Problemi vidljivosti

DOMAGOJ MATIJEVIĆ, DOMAGOJ ŠEVERDIJA*

Sažetak. *Za dvije točke kažemo da vide jedna drugu ukoliko ne postoji prepreka koja bi presijecala segment koji ih spaja. Na temelju geometrijskog modela predstaviti ćemo klasične probleme vidljivosti kao što su problem galerije, problem utvrde i problem čuvanja terena. Iznosimo osnovne rezultate vezane uz spomenute probleme i neke od varijacija tih problema.*

Ključne riječi: *problem vidljivosti, problem galerije, problem utvrde, problem čuvanja terena*

Visibility problem

Abstract. *For any two points we say that they see each other if there exists no obstacle intersecting the segment that connects them. Based on the geometric models we will present some classical problems of visibility such as the art gallery problem, the fortress problem and the terrain guarding problem. We will present a few basic results for those classical problems, as well as present some variations of the problems.*

Key words: *visibility problems, art gallery problem, fortress problem, terrain guarding problem*

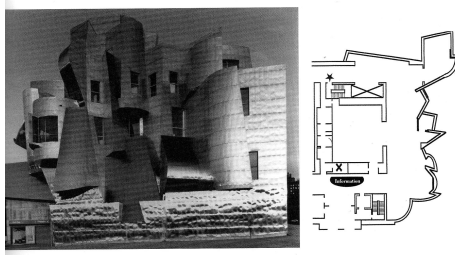
1. Uvod

Problemi vidljivosti predstavljaju posebno područje proučavanja u izračunljivoj geometriji (*computational geometry*). Pod pojmom vidljivosti u geometriji podrazumijevamo odnos između dvije točke tako da kažemo da dvije točke vide jedna drugu ukoliko ne postoji prepreka između njih (pojam vidljivosti može imati i druge sinonime: čuvanje, komunikacija, osvjetljenost itd.). Problem vidljivosti nalazi primjenu u robotici, planiranju putanje, CAD sustavima [1], postavljanje komunikacijskih antena i sustava za nadziranje [7] itd. U ovom radu čitatelja ćemo upoznati s tri problema vidljivosti, točnije s *problemom galerije, problemom utvrde i problemom čuvanja terena.*

*Odjel za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, domagoj@mathos.hr, dseverdi@mathos.hr

2. Problem galerije s umjetninama

Problem galerije s umjetninama (engl. *Art gallery problem*) jedan je od temeljnih problema vidljivosti. Motiviran je problemom smještanja minimalnog broja čuvara u galeriju s umjetninama tako da svi čuvari zajedno promatraju čitavu galeriju (vidi *Sliku 1*).



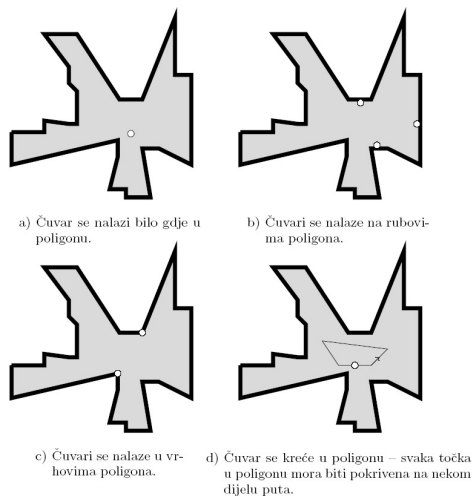
Slika 1. Galerija s umjetninama i njen tlocrt, slika preuzeta iz [8].

Viktor Klee je 1973. godine postavio sljedeće pitanje:

Koliko je čuvara nužno, a koliko dovoljno da čuvaju umjetnine u galeriji s n zidova?

2.1. Geometrijska svojstva problema

Promatrajmo našu galeriju kao geometrijski lik i u tu svrhu tlocrt naše galerije možemo predstaviti kao jednostavni poligon P . Poligon P je potrebno čuvati čuvarima koji su predstavljeni točkama u ravnini. Svaki čuvar vidi određeni dio poligona, a svi čuvari zajedno trebaju vidjeti čitavi poligon. Prirodno pitanje koje se postavlja je koliko čuvara nam je potrebno da čuvamo poligon P ?

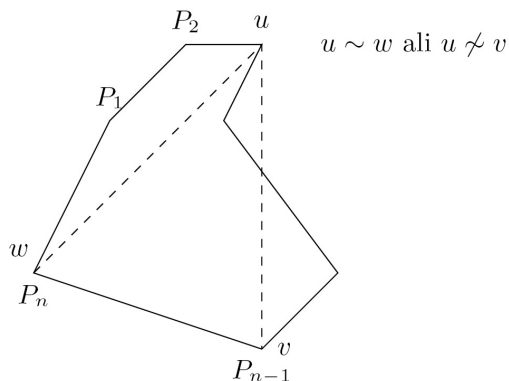


Slika 2. Galerija kao poligon i različiti tipovi čuvanja interijera.

Ovisno o lokaciji i tipu čuvara koje želimo koristiti razlikujemo nekoliko mogućih varijanti čuvanja galerije: čuvari koji se mogu nalaziti u interijeru galerije, čuvari koji se nalaze uz zidove galerije, čuvari koji se nalaze u kutovima galerije i pokretni čuvari (vidi *Sliku 2*). Uočite da u svim primjerima u *Slici 2* čuvari pokrivaju interijer i da ukupni broj čuvara koji pokrivaju poligon varira. Kod klasičnog problema galerije podrazumijevamo čuvare u vrhovima.

Formalizirajmo sada pojmove: Poligon P je uređeni niz točaka P_1, P_2, \dots, P_n , $n \geq 3$ koje zovemo *vrhovima* poligona P zajedno sa skupom dužina, koje zovemo *rubovi*. Rubovi spajaju vrhove P_i s P_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$ i vrh P_n s P_1 . (vidi *Sliku 3*). Poligon P je *jednostavan* ako se nikoja 2 nesusjedna ruba ne sijeku. Jednostavan poligon u ravnini omeđuje ravninu na 2 dijela: vanjsko područje (*eksterijer*) i unutarnje područje (*interijer*). Mi ćemo pod pojmom poligona podrazumijevati poligon zajedno s njegovim unutarnjim područjem.

Za točku $v \in P$ kažemo da je *vidljiva* iz točke $u \in P$ i pišemo $u \sim v$ ukoliko je dužina \overline{uv} u potpunosti sadržana u poligonu P . Za skup Q točaka poligona P kažemo da *čuva* poligon P ako je svaka točaka poligona P vidljiva iz barem jedne točke u Q .



Slika 3. Jednostavni poligon s n vrhova.

Triangularizacija poligona P je podjela poligona P u skup trokuta koji su u parovima disjunktni i vrhovi tih trokuta su vrhovi poligona P , a stranice trokuta su rubovi poligona P ili dijagonale koje spajaju 2 nesusjedna vrha u poligonu P (*Slika 4.a*).

Za danu triangularizaciju T poligona P definiramo graf $GT(P)$ na način da su mu vrhovi upravo vrhovi poligona P , a bridovi su stranice trokuta iz triangularizacije. *Bojanje* vrhova nekog grafa G podrazumijeva pridruživanje boja njegovim vrhovima tako da svaka 2 susjedna vrha budu različito obojani. Ukoliko je k najmanji broj različitih boja za kojeg je bojanje grafa moguće, onda taj broj k zovemo *Kromatski broj* grafa G .

Koristiti ćemo sljedeća dva teorema:

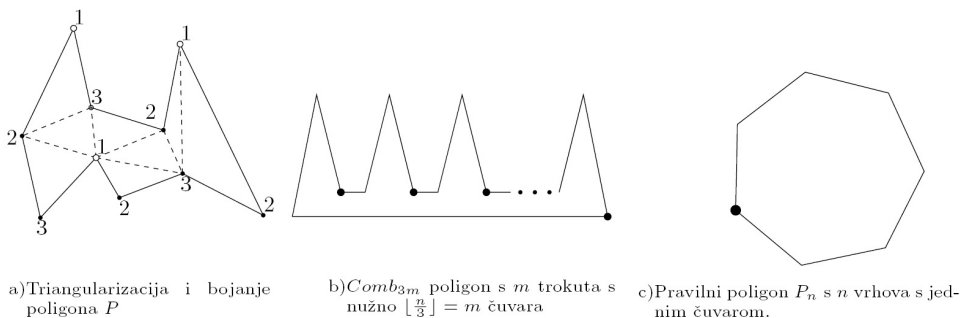
Teorem 1 [Teorem o triangularizaciji, [2]]. *Svaki se jednostavan poligon može triangularizirati.*

Štoviše, svaka triangularizacija T poligona P s n vrhova sadrži $n - 2$ trokuta.

Teorem 2 [[2]]. Neka je P jednostavni poligon i T triangularizacija poligona P . Tada $GT(P)$ ima kromatski broj 3.

2.2. Složenost problema

Vratimo se sada na naš problem. Dakle, koliko je potrebno čuvara da bismo čuvali jednostavni poligon P ? Odgovor na to pitanje daje nam Chvátalov teorem.



Slika 4. Triangularizacija poligona, "češalj" poligon i primjer čuvanja pravilnog poligona.

Teorem 3 [Chvátalov teorem]. Za čuvanje poligonalne galerije s n vrhova dovoljno je, a ponekad i nužno $\lfloor n/3 \rfloor^1$ čuvara.

Dokaz. Neka je P jednostavni poligon s n vrhova. Po *Teoremu 1* možemo triangularizirati P i dobivamo graf $GT(P)$. Po *Teoremu 2* možemo obojati vrhove grafa $GT(P)$ tako da bilo koja 2 susjedna vrha grafa $GT(P)$ budu obojana različitim bojama. Neka su $\{1, 2, 3\}$ redom oznake boja. Uočite da boje dijele vrhove od $GT(P)$ u disjunktne particije C_1, C_2 i C_3 (vidi *Sliku 4.a*). Očito, jedna od particija, npr. C_1 sadrži $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ točaka. Kako svaki trokut u triangularizaciji sadrži sve 3 boje, dovoljno je staviti čuvara na vrhove iz C_1 . Tvrdnja teorema dalje slijedi iz činjenice da se svaki trokut može čuvati čuvarom iz jednog vrha i da vrhovi poligona tvore vrhove grafa $GT(P)$. \square

Situaciju u kojoj je potrebno nužno $\lfloor n/3 \rfloor$ čuvara za čuvanje poligona možemo vidjeti iz slike poligona $Comb_n$, $n = 3m$, gdje m je broj gornjih trokuta (*Slika 4.b*).

Konstruktivni dokaz *Teorema 3* može nam poslužiti za formuliranje algoritma NADJICUVARE koji će nam za dani jednostavni poligon P s n vrhova vratiti $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vrhova u koje možemo staviti čuvar.

¹ $\lfloor \cdot \rfloor$ je oznaka za pod funkciju koja zadanom realnom argumentu x vraća najveći cijeli broj x' koji je manji ili jednak x . npr. $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$, $2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$

NADJICUVARE(P)

1. triangulariziraj P
2. obojaj s $\{1, 2, 3\}$ vrhove od T
3. postavi čuvaru na vrhove koji su obojani bojom 1.

Gornja procedura se sastoji od 3 koraka, od kojih se svaka može efikasno implementirati. *Korak 1.* moguće je implementirati primjenom Chazelleove procedure za triangularizaciju poligona, a za *korak 2.* postoji jednostavna procedura 3-bojanja grafa. (Detaljnije, vidi [2],[9]).

Primjetimo da *Teorem 3* odnosno algoritam NADJICUVARE daje općenito gornju među broja čuvara koji su dovoljni da čuvaju bilo koji poligon s n vrhova. Dakle, sigurno postoje primjeri poligona gdje nam je broj potrebnih čuvara znatno manji nego rješenje koje nam vraća algoritam. Zapravo, mogli bi reći da je procedura NADJICUVARE pesimistična jer, kao što možemo vidjeti na primjeru u *Slici 4.c*, procedura će nam vratiti $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ čuvara, premda je dovoljno odabrati jedan vrh poligona da čuva čitav poligon.

Postavlja se pitanje, možemo li osmisliti algoritam koji će nam pronaći *najmanji* broj čuvara potreban za čuvanje nekog poligona P ? Na žalost, situacija je pesimistična i po tom pitanju, jer se može pokazati da problem optimalnog čuvanja galerije s umjetninama pripada klasi takozvanih NP-teških problema². Stoga se u praksi često koriste aproksimacijski algoritmi i heuristike za rješavanje problema.

2.3. Varijacije problema

Poznati su i drugi rezultati vezani za nužan i dovoljan broj čuvara ukoliko mijenjamo geometrijski model galerije. Predstaviti ćemo 2 primjera.

2.3.1. Ortogonalna galerija s umjetninama

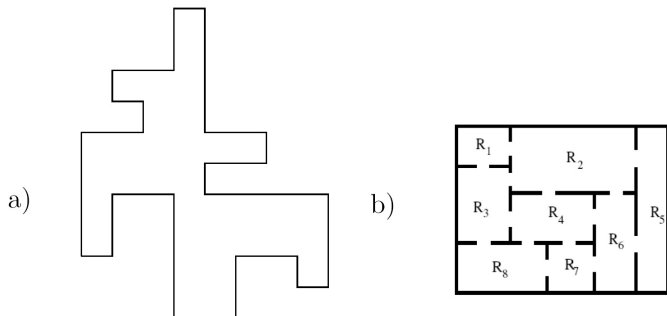
Za poligon P kažemo da je *ortogonalan* ako su mu rubovi paralelni s x -osi ili s y -osi (*Slika 5.a*).

Na sličan način kao u *Teoremu 3* možemo pokazati da se ortogonalan poligon može podijeliti na konveksne četverokute (analogija triangularizacije) i iz toga lako pokazati da vrijedi slijedeće:

Teorem 4 [[2]]. *Svaki se ortogonalni poligon s n vrhova može čuvati s $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ čuvara.*

²Precizna definicija klase NP-teških problema izlazi iz tematskog okvira ovog članka. Intuitivno, svaki problem za koji kažemo da pripada klasi NP-teških problema je problem koji je 'nemoguće' optimalno riješiti.

2.3.2. Pravokutna galerija s umjetninama



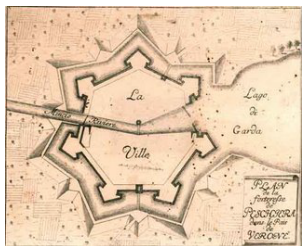
Slika 5. Ortogonalna galerija i tradicionalna galerija s umjetninama.

U formulaciji problema galerije s umjetninama, galerija je predstavljena kao jednostavan poligon. Realističniji model galerije bi bila pravokutna zgrada podijeljena u pravokutne sobe (Slika 5.b).

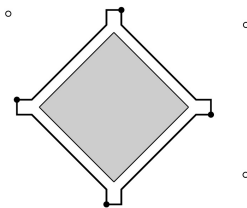
Pitanje je koliko je potrebno čuvara staviti u galeriju da čuva sve sobe? Iz slike možemo uočiti ukoliko stavimo čuvara na vrata između 2 sobe, čuvar može čuvati najviše 2 sobe. Ako galerija ima n soba onda čitavu galeriju sigurno možemo čuvati s $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čuvara. Preciznije, može se pokazati sljedeća tvrdnja:

Teorem 5 [[2]]. $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čuvara je dovoljno, ali uvijek i nužno za čuvanje svake pravokutne galerije s n soba.

3. Problem utvrde - Fortress problem



Slika 6. Utvrda Pescheira del Garda blizu Verone u Italiji.



Slika 7. Čuvanje eksterijera vanjskog poligona P s čuvarima iz vrha (crni kružići) i točkama iz eksterijera (bijeli kružići).

U ovom dijelu predstaviti ćemo *Problem utvrde* (engl. *Fortress problem*). Za razliku od klasičnog problema galerije gdje je zahtjev bio na čuvanju interijera danog poligona P , ovdje pažnju usmjeravamo na čuvanje eksterijera tog poligona. Problem je motiviran čuvanjem utvrde od navale neprijatelja pomoću čuvara koji su

¹ $\lceil \cdot \rceil$ je oznaka za *strop funkciju* koja zadanom realnom argumentu x vraća najmanji cijeli broj x' koji je veći ili jednak x . npr. $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$

postavljeni na zidove utvrde (*Slika 6*). Treba odabrati broj čuvara i njihov položaj tako da čitava okolica oko utvrde bude pokrivena.

3.1. Geometrijska svojstva problema

Koristeći geometrijske pojmove iz prethodnog odjeljka utvrdu možemo predstaviti kao jednostavni poligon s n vrhova, područje koje se čuva je eksterijer poligona, a čuvare možemo modelirati kao točke koje mogu biti postavljene na vrhovima poligona, rubovima poligona, eksterijeru poligona ili "pokretne" točke.

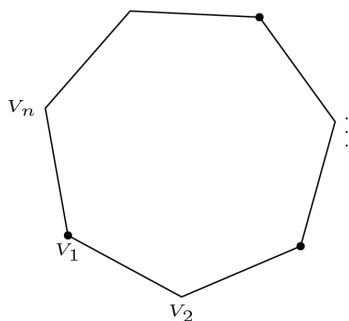
Problem utvrde možemo sada ovako formulirati:

Koliko je čuvara dovoljno, a ponekad i nužno postaviti u vrhove jednostavnog poligona P s n vrhova tako da svi čuvari zajedno pokrivaju eksterijer poligona P ?

3.2. Čuvanje utvrde iz vrhova poligona

Sljedeća tvrdnja nam daje uvijek gornju među na broj potrebnih čuvara za čuvanje utvrde.

Teorem 6 [O'Rourke and Wood 1983]. $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čuvara je dovoljno, a ponekad i nužno za čuvanje eksterijera jednostavnog poligona s n vrhova.



Slika 8. Pravilni poligon P_n s nužnim $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čuvarima.

Dokaz. Prvo pokažimo na primjeru pravilnog poligona s n vrhova da je za čuvanje eksterijera $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ nužan broj čuvara.

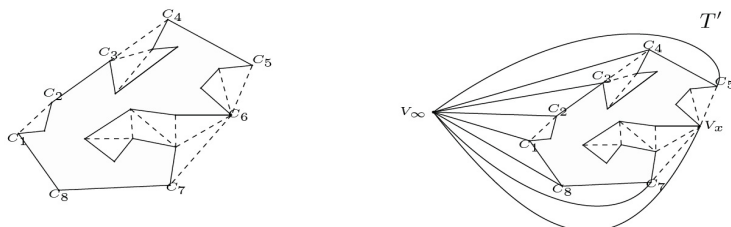
Iz *Slike 8* možemo uočiti da za čuvanje pravilnog poligona s n vrhova trebamo uzeti svaki drugi vrh kako bi čuvali eksterijer, što znači da moramo odabrati nužno $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrhova za čuvanje eksterijera. \square

Pokažimo sada da za čuvanje eksterijera jednostavnog poligona je dovoljno izabrati $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čuvara.

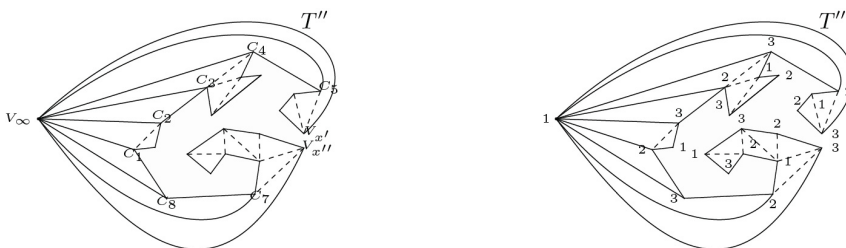
Dokaz se temelji na tome da eksterijer danog poligona predstavimo kao interijer nekog drugog poligona na kojeg onda možemo primijeniti *Teorem 3*.

Uzmimo proizvoljni jednostavni poligon P (*Slika 9.a*). Pronađimo konveksnu ljusku

$CH(P)^3$ vrhova poligona P i triangularizirajmo onaj dio eksterijera poligona P koji je sadržan u konveksnoj ljusci $CH(P)$ i eksterijeru poligona P . Označimo s T graf čiji su vrhovi upravo vrhovi poligona P , a rubovi su stranice iz triangularizacije.



- a) Točke $C_i, i = 1, \dots, 8$ su vrhovi konveksne ljuske $CH(P)$ poligona P . Iscrtane dužine predstavljaju stranice triangularizacije
- b) Vrh V_∞ spojen sa svim vrhovima od $CH(P)$ zajedno s triangularizacijom T



- c) Graf T'' kojeg smo dobili iz $T' \setminus V_x$ i dodali nove vrhove $V_{x'}, V_{x''}$.
- d) Ukoliko izaberemo 2 za položaj čuvara na vrhovima poligona, čuvari će pokriti eksterijer i imati ćemo ih $8 \leq \lceil \frac{20}{2} \rceil = 10$

Slika 9. Prikaz koraka u dokazu *Teorema 6*.

Dodajmo sada dodatan vrh V_∞ u graf T izvan $CH(P)$ i učinimo ga susjednim vrhom svim vrhovima u $CH(P)$ i označimo novonastali graf s $n + 1$ vrhova s T' (Slika 9.b). Odaberimo sada vrh V_x iz konveksne ljuske $CH(P)$ i rastavimo ga na vrhove $V_{x'}$ i $V_{x''}$ tako da jedan vrh zadrži rub s V_∞ , a drugom dodamo rub s V_∞ na način da novonastali graf $T'' := (T' \setminus \{V_x\}) \cup \{V_{x'}, V_{x''}\}$ bude planaran, tj. nikoga dva brida mu se ne sijeku (Slika 9.c). Tvrdimo da je T'' triangularizacijski graf novog jednostavnog poligona P' , kojeg čine vrhovi poligona P zajedno s vrhom V_∞ , koji 'dobro' aproksimira eksterijer poligona P . Definirajmo poligon P' koristeći sljedeći geometrijski argument: smjestimo vrh V_∞ u točku koja se nalazi dovoljno daleko te vrhove $V_{x'}$ i $V_{x''}$ dovoljno udaljimo jedan od drugoga tako da bridovi grafa T'' postanu ravne linije.

Iz svojstva da se triangularizacijski graf svakog jednostavnog poligona može obojati s 3 boje (*Teorem 2*), rasporedimo boje $\{1, 2, 3\}$ na graf T'' (Slika 9.d). Razlikujemo 2 slučaja:

- Neka je 1 boja koja se pojavljuje najmanje puta. Ukoliko V_∞ nije obojan bojom 1 tada je s 1 obojano najviše $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrhova.
- Ukoliko je 1 boja koja se najmanje puta pojavljuje i ukoliko je s 1 obojan V_∞ tada moramo uzeti drugu boju jer V_∞ nije vrh s poligona P . Uzmimo,

³Najmanji konveksan poligon koji sadrži točke iz P .

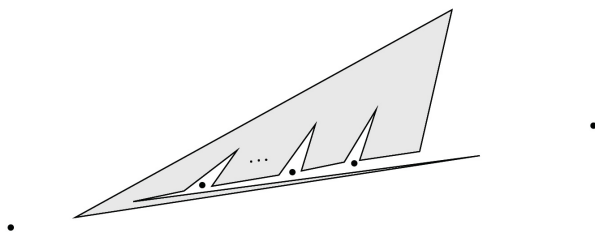
dakle, sljedeću boju koja se pojavljuje najmanje puta npr. boja 2. Kako je s 1 obojan vrh V_∞ uočimo da boje 2 i 3 mogu obojati najviše $(n + 2) - 1 = n + 1$ vrhova. Slijedi da 2 može bojati najviše $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrhova poligona.

Čuvare postavljamo na odabranu boju. Konačno, u oba slučaja čuvari pokrivaju trokute incidentne s V_∞ . Kako V_∞ nije čuvar, izabrani čuvari su točke konveksne ljske $CH(P)$ koji pokrivaju čitav eksterijer od $CH(P)$. Eksterijer poligona P , a koji se nalazi unutar konveksne ljske, je također pokriven budući su svi trokuti iz triangularizacije T'' čuvani. \square

3.3. Čuvanje utvrde van poligona

Promotrimo sada problem uz uvjet da čuvari mogu biti bilo gdje u eksterijeru poligona uključujući i same rubove poligona. Iskažimo teorem o dovoljnom i nužnom broju čuvara za čuvanje utvrde izvan poligona.

Teorem 7 [[6]]. $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ čuvara je dovoljno, a ponekad i nužno za čuvanje eksterijera poligona P s n vrhova.

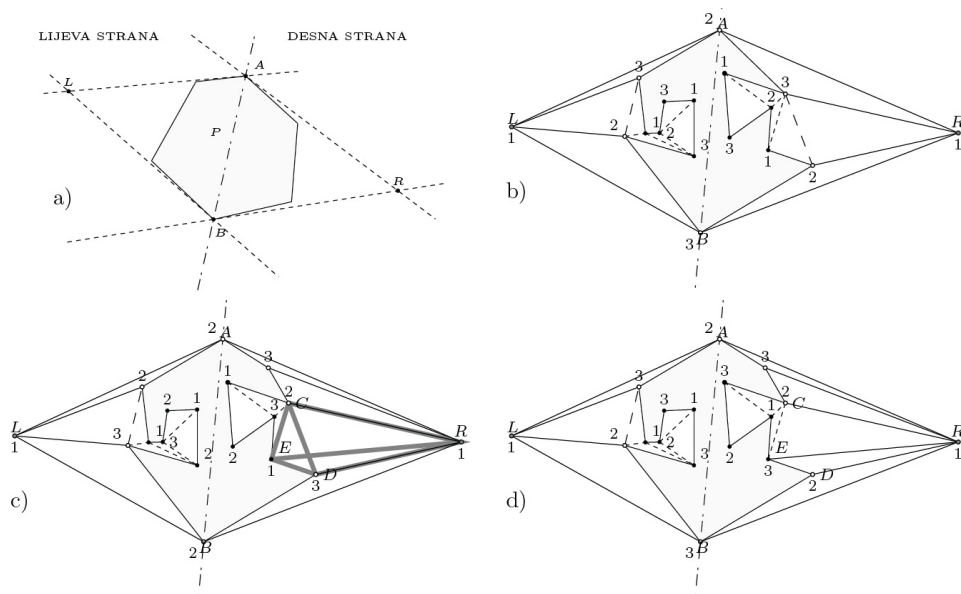


Slika 10. Poligon sa n vrhova kojem je nužan broj čuvara $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Dokaz. Nužnost u pojedinim slučajevima pokazujemo generičkim primjerom u *Slici 10*. Za eksterijer izvan konveksne ljske izaberemo 2 čuvara, a za eksterijer unutar poligona odabiremo na sličan način kao i u češalj poligonu nužno $\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil, n \geq 4$ čuvara.

Dokažimo sada dovoljnost. Promotrimo slučaj kada je poligon P konveksan (*Slika 11.a*) i odredimo dovoljan broj čuvara za eksterijer. Odaberemo 2 vrha: najviši vrh A (npr. vrh sa najvećom y koordinatom) i najniži vrh B (npr. vrh s najmanjom y koordinatom), ukoliko ti vrhovi nisu jedinstveni, rotiramo poligon P dok ne dobijemo jedinstveni najviši i najniži vrh (npr. ukoliko je P kvadrat čije su stranice paralelne s x odnosno s y osi, možemo ga rotirati za 45° i odaberemo 2 dijagonalno suprotna vrha). Sada na lijevu i desnu stranu poligona odaberemo točke L, R koje vide najviši i najniži vrh konveksnog poligona P . Uočite da s čuvarima u točkama L, R pokrivamo eksterijer poligona, dakle $2 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil, n > 3$.

U slučaju da poligon P nije konveksan, ideja je da nađemo čuvare za njegovu konveksnu ljsku, a čuvare eksterijera poligona P koji je sadržan u $CH(P)$ nađemo tako da triangulariziramo područje i primijenimo *Teorem 3*. To možemo napraviti na način prikazano na *Slici 11.b*.



Slika 11. Čuvanje eksterijera poligona čuvarima izvan poligona.

Dakle, nađemo konveksnu ljusku $CH(P)$ poligona P i triangularizirajmo eksterijer poligona P unutar $CH(P)$. Točke L, R odaberemo na način kako smo prethodno učinili za konveksni poligon. Neka je graf G graf čiji su vrhovi točke L, R i vrhovi poligona P , a rubovi dijagonale koje spajaju L odnosno R s vrhovima od $CH(P)$ s odgovarajuće strane, zajedno sa dijagonalama triangularizacije u eksterijeru unutar konveksne ljuske. Primjetimo da je graf G graf triangularizacije, međutim ne više jednostavnog poligona pa ne možemo više primjeniti *Teorem 2*. Stoga moramo dodatno argumentirati da je graf G 3-bojiv:

SLUČAJ 1. Uočite da ukoliko je broj vrhova konveksne ljuske $CH(P)$ paran, graf G je 3-bojiv. To možemo učiniti tako da naizmjenično obojamo vrhove konveksne ljuske s 2, 3, a s 1 obojamo L, R . Uočite da smo time fiksirali bojanje vrhova bridova konveksne ljuske, a koji su zajednički poligonima koji predstavljaju eksterijer unutar konveksne ljuske te možemo 3-obožati eksterijer unutar poligona (po načelu *ear clipping*, [5]). Kako G ima $n + 2$ vrhova po *Teoremu 3*, $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ je dovoljno čuvara da pokriju eksterijer od P i čuvare možemo staviti na one vrhove od G koji su obožani s najmanje pojavljivanom bojom.

SLUČAJ 2. Ukoliko je $|CH(P)|$ neparan, graf G ne mora biti 3-bojiv (vidi *Sliku 11.c*). Ideja je da se G modificira tako da postane 3-bojiv. Neka je CD otvor u $CH(P)$, tj. eksterijer unutar konveksne ljuske pri bridu CD (takav otvor postoji jer je P nekonveksan) i bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da se CD nalazi na desnoj strani poligona. Odaberimo vrh E koji s C, D tvori

trokut iz triangularizacije u otvoru CD takav da zajedno s R, C, E, D tvori konveksan četverokut $RCED$. Načinimo novi graf G' tako da grafu G dodamo rub ER , a oduzmemo rub CD (ukoliko $R \neq E$, R, L uvijek možemo pomaknuti tako da $R \sim E$, a da sačuvamo svojstvo da L, R zajedno vide obje strane konveksne ljuste). Promotrimo da tim postupkom nismo promijenili područje koje trebamo čuvati. Dakle, novonastali graf G' s $n + 2$ vrha ima sada paran broj dijagonala spojenih s L, R (Slika 11.d). Primijenimo razmatranje za paran slučaj. Problem može nastati ukoliko C, D nisu odabrani kao čuvari, ali u tom slučaju mora biti odabran ili R ili E što implicira da je eksterijer i dalje pokriven. Zaključujemo da je za čuvanje eksterijera od P dovoljno $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ čuvara.

Na temelju bojanja grafa G (odnosno G') čuvere stavimo na one vrhove koji su obojani s najmanje pojavljivanom bojom. U Slici 11.b najmanje pojavljivana boja je 2 pa čuvere stavljamo u vrhove obojani s 2. Najmanje pojavljivana boja je 1 u Slici 11.c pa ovdje čuvere možemo staviti i u točke L i R . Uočimo da ovakvom analizom problema dopuštamo najviše 2 čuvara da budu izvan poligona. Isto tako, uočimo, da dopuštanjem čuvara da budu i izvan poligona "približavamo" se ocjeni čuvanja interijera poligona ($\lceil \frac{n}{3} \rceil$ nasuprot $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$). \square

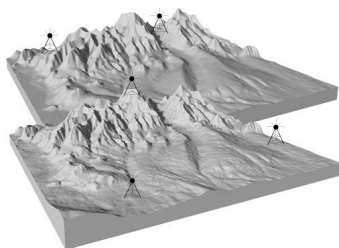
Problem čuvanja poligona može se generalizirati i na čuvanje istovremeno interijera i eksterijera poligona čuvarima u vrhovima. Takav problem se zove *problem zatvorskog dvorišta* (engl. *prison yard problem*). Iznosimo rezultat iz [3] za problem:

Teorem 8 [Fredri, Kleitman, 1990]. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ čuvara smještenih u vrhovima jednostavnog poligona P je dovoljno da pokriju zajedno interijer i eksterijer od P s n vrhova. Ukoliko je P nekonveksan, onda je dovoljno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ čuvara u vrhovima.

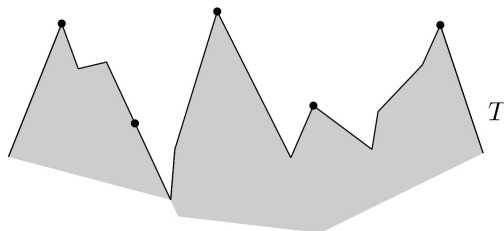
4. Problem čuvanja terena

Promotrimo sljedeći scenario:

Na određenom terenu operateri mobilne telefonije žele postaviti komunikacijske antene tako da čitav teren bude pokriven signalom (Slika 12). U svrhu minimiziranja cijene same investicije, želja operatera je pokriti teren sa što je manje moguće antena.



Slika 12. 3D teren s postavljenim komunikacijskim antenama.



Slika 13. Ilustracija 1.5D-terena s čuvarima.

Ovaj problem možemo formulirati kao *problem čuvanja terena* uz pomoć čuvara koje postavljamo na teren. Cilj nam je pronaći najmanji broj čuvara tako da čitav teren bude čuvan. Takav problem se naziva *problem čuvanja 2.5D terena* (engl. *2.5D terrain guarding problem*). Na žalost i ovaj problem se može pokazati da pripada klasi tzv. NP-teških problema. Čak štoviše, malo je vjerojatno da se može dobro aproksimirati (može se pokazati da je problem jednako težak kao i generalni *Set cover* problem [7]).

Ukoliko smanjimo dimenziju terena, tj. umjesto trodimenzionalnog područja promatramo poligonalnu liniju dolazimo do tzv. *problem čuvanja 1.5D terena*. Preciznije, za x -monotonu poligonalnu liniju T cilj nam je pronaći najmanji broj čuvara koje ćemo postaviti na T tako da čuvamo svaku točku poligonalne linije (*Slika 13*).

4.1. Problem čuvanja 1.5D terena

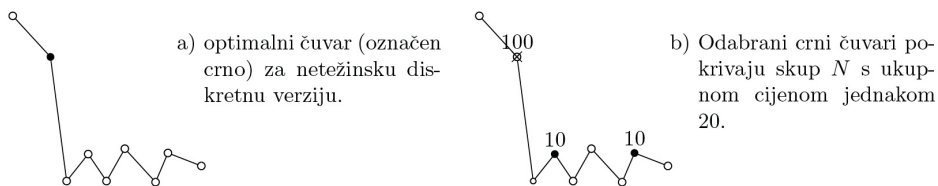
Teren T je x -monotona poligonalna linija s n vrhova. Označimo s V vrhove terena T . *Problem čuvanja 1.5D terena* (engl. *1.5D terrain guarding problem*) za T je problem postavljanja čuvara na T tako da je svaka točka $p \in T$ čuvana od strane barem jednog čuvara. Ovisno o tipu i položaju čuvara na terenu T razlikujemo nekoliko varijanata problema.

4.2. Diskretna verzija

U *diskretnoj* verziji problema dan nam je skup mogućih čuvara $G \subseteq T$ i skup točaka koje želimo čuvati $N \subseteq T$. Cilj je odrediti najmanji skup čuvara $A \subseteq G$ koji će braniti N .

Dodatno se može odrediti cijena svakog potencijalnog čuvara iz G , tj. funkcija $w : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ pa se problem svodi na pronalaženje podskupa čuvara $A \subseteq G$ tako da je $\sum_{g \in A} w(g)$ najmanja, tj. ukupna cijena odabranih čuvara je najmanja moguća.

Promotrimo primjer na *Slici 14* za slučaj kad je $G = N = V$. Uočimo da težinski slučaj ne ovisi isključivo o geometriji terena, već ponajprije o induciranim cijenama na čuvarima.



Slika 14. Primjer diskretne verzije problema kad je $G = N = V$.

Uočimo da u prvom slučaju na *Slici 14* jedan čuvar pokriva čitav N , dok u drugom slučaju, bez obzira što imamo više čuvara koji pokrivaju N , oni su "isplativiji" nego da smo odabrali čuvara s težinom 100.

4.3. Jednostrana verzija

Možemo dodatno staviti restrikciju na smjer gledanja čuvara pa takvu varijantu problema formuliramo:

Za dani skup mogućih čuvara $G \subseteq T$ i skup točaka koje želimo čuvati $N \subseteq T$ razlikujemo:

1. *čuvanje s lijeva* - svaka točka iz N mora biti čuvana s lijeva.
2. *čuvanje s desna* - svaka točka iz N mora biti čuvana s desna.

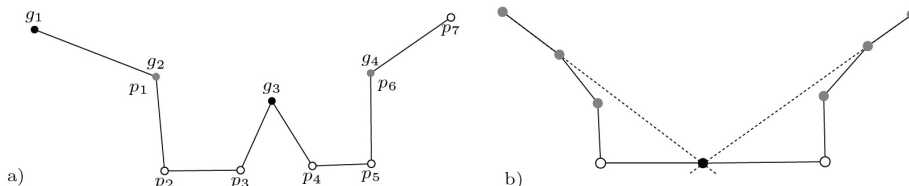
Posebnost jednostrane verzije problema je što možemo efikasno pronaći optimalan skup čuvara A . Predstaviti ćemo algoritam iz [7] za pronalaženje čuvara za čuvanje s lijeva danog terena T . Na simetričan način se može definirati algoritam za čuvanje s desna.

```

LEFT-GUARDING ( $T, N, G$ )
 $A \leftarrow \emptyset$     ▷ skup koji
for  $p \in N$  processed from left to right  ▷ prolazimo skupom  $N$  s lijeva na desno
    if  $p$  is not yet seen by  $A$  then    ▷ ako  $p$  nije viđen od  $A$ 
         $A \leftarrow A \cup \{L(p)\}$     ▷ u skup čuvara  $A$  dodajmo najlijevijeg čuvara od  $p$ 
return  $A$ 
    
```

Na *Slici 15.a* imamo primjer kad su skupovi $G, N \subset T$ ne nužno disjunktni i prikazano je optimalno rješenje za obostrano i jednostrano čuvanje s lijeva terena T (tj. čuvanje N s G).

Dakle, $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ i $N = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, rješenje koje vraća LEFT-GUARDING algoritam je $A = \{g_1, g_2, g_3\}$ dok bi rješenje za obostrano čuvanje terena bilo $A = \{g_3\}$.



Slika 15. Čuvanje terena ovisno o karakteru čuvara.

4.4. Generalna verzija

U *generalnoj* verziji problema cilj je pronaći najmanji skup čuvara $G \subseteq T$ koji vidi svaku točku na terenu T . Dakle, čuvari mogu biti bilo koja točke na terenu T i moraju biti čuvane sve točke terena T .

Zaista, ponekad je optimalnije odabrati točku koja nije iz vrha da čuva dio terena, što se možemo uvjeriti iz *Slike 15.b*. Uočimo da odabrana točka na terenu vidi sve što vide susjedni vrhovi (označeni bijelo). U slučaju da smo zahtjevali da čuvari budu iz vrhova mogli smo uzeti bijele vrhove. Ovaj primjer pokazuje, ukoliko imamo slobodu odabira čuvara na terenu ne znači da su optimalni čuvari isključivo u vrhovima.

Na žalost, i ovaj problem pripada klasi NP-teških problema, ali se može efikasno aproksimirati. Sljedeći teorem nam kaže da je moguće pronaći algoritam koji će nam vratiti ukupan broj čuvara čiji broj ne premašuje ‘previše’ optimalan broj čuvara:

Theorem 9 [[7]]. *Postoji 4-aproksimacijski algoritam za problem čuvanja 1.5D terena s težinama, tj. vrijedi*

$$OPT \leq |A| \leq 4 \cdot OPT$$

gdje je OPT optimalan broj čuvara, a A označava skup čuvara koje nam daje aproksimacijski algoritam.

Zaključak

U ovom radu je napravljan kratak pregled problema vidljivosti. Na žalost, kako je čitatelj i sam mogao zapaziti, većina problema potpada pod klasu NP-teških problema. Čak štoviše, za većinu problema je nemoguće dizajnirati niti dobar aproksimacijski algoritam. Na primjer, problem čuvanja 1.5D terena je jedan od rijetkih za koje se pokazalo da je to moguće (*Teorem 9*). Većina argumenata koja se koristila u dokazima je geometrijske i kombinatorijalne naravi te nije zahtjevala široko matematičko predznanje. Samim tim se nadamo da će čitatelji pronaći interes u ovoj temi.

Literatura

- [1] P. COLLEY, *Visibility problems and optimization in computational geometry*, doctoral thesis, Queen University, Kingston, Ontario, Canada, 1998
- [2] J. URRUTIA, *Art Gallery and Illumination problems*, survey, 2004.
- [3] Z. FÜREDI, D. J. KLEITMAN, *The Prison Yard Problem*, *Combinatorica*, vol. 14(1994),no. 3.
- [4] P. K. AGARWAL, *Covering, Packing and Art Gallery problems*, Lecture notes, 2007.
- [5] J. O’ROURKE, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, International Series of Monographs on Computer Science, No. 3, Oxford University Press, 1987
- [6] Fortress problem, <http://www.cs.mcgill.ca/~cs507/projects/1998/eposse/>
- [7] K. ELBASSIONI, D. MATIJEVIC, J. MESTRE, D. SEVERDIJA, *Improved Approximations for Guarding 1.5 Dimensional Terrains*, arXiv:0809.0159, 2008.
- [8] M. AIGNER, G. M. ZIEGLER, AND K.H. HOFMANN, *Proofs from the Book*, Springer-Verlag, 2003.
- [9] B. CHAZELLE, *Triangulating a simple polygon in linear time*, *Discrete Comput. Geom.*, 6(1991), no. 5, pp. 485-524.