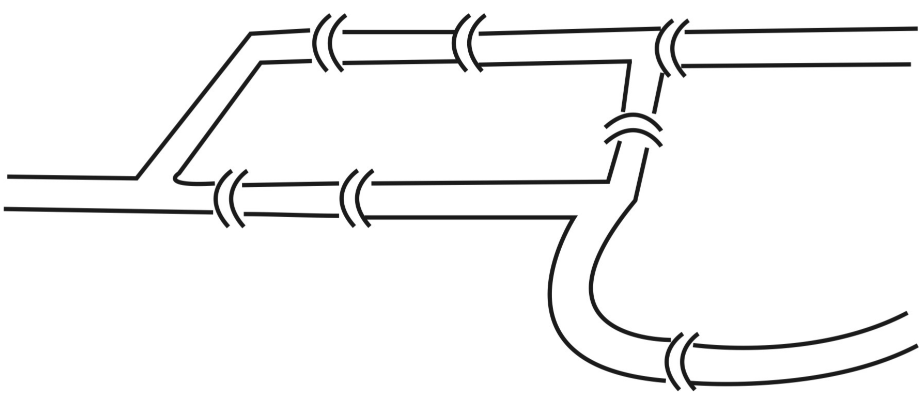
POVIJESNA RUBRIKA

Leonhard Euler

Franka Miriam Brückler*

Slika 1. Leonhard Euler (slika je preuzeta s web-stranice Mac Tutor History of Mathematics Archives).

Grad Königsberg (danas Kaliningrad) leži na rijeci Pregel. Četiri dijela grada povezana su sa sedam mostova, kako je prikazano slikom 2. Može li se grad obići tako da se svaki most prijeđe točno po jednom?

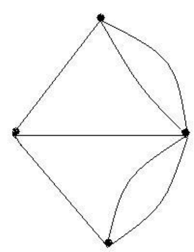


Slika 2. Problem mostova u Königsbergu.

Upravo navedeni zadatak, poznat kao problem mostova u Königsbergu, jedan je od najpoznatijih zadataka tzv. zabavne matematike. Konačno rješenje, dokaz da

*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

je odgovor "ne", dao je znameniti švicarski matematičar Leonhard Euler. Metoda kojom je riješio problem postala je temelj nove matematičke discipline topologije. Euler je naime uočio da je u ovom problemu nebitno koliko je što udaljeno kao i kakav je točno raspored dijelova grada, jedino bitno je što je s čime povezano mostovima. Upravo ta koncentracija na pitanja povezanosti dijelova nekog objekta umjesto na njegova geometrijska svojstva (oblik, veličina i sl.) je temeljna razlika topologije i geometrije. Sâm Euler je rješenje tog problema objavio 1736. godine pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*: iz naslova je vidljivo da je Euler bio svjestan da se radi o obliku geometrije u kojemu su udaljenosti nebitne. Pritom je Euler dao puno općenitiji rezultat od samog rješenja problema mostova u Königsbergu — dao je pravilo kako općenito riješiti takve probleme. Suvremenim jezikom iskazano, Euler je primijetio da se radi o problemu iz teorije grafova, pri čemu su grafovi objekti koji se sastoje iz nekog broja točaka (vrhova) povezanih linijama (bridovima). Četiri dijela Königsberga se mogu shvatiti kao četiri vrha grafa, a sedam mostova kao sedam bridova (vidi sliku 3). Želimo li obići graf, u svaki vrh moramo ući i izaći. Kako je uvjet zadatka bio svaki most, dakle brid, preći samo jednom, znači da se u svakom vrhu mora sastajati paran broj bridova, što očigledno nije istina za graf problema mostova u Königsbergu pa grad nije moguće obići na zadani način.



Slika 3. Graf problema Königsbergških mostova.

Uz utemeljenje topologije, Euler je dao mnoštvo drugih značajnih doprinosa matematici i fizici (mehanici). Prije nego neke od njih opišemo, reći ćemo nešto o njegovu životu.

Rođen je 15. travnja 1707. u Baselu u Švicarskoj. Otac mu je bio protestantski svećenik, no u doba studija teologije stekao je i solidno matematičko obrazovanje slušajući predavanja Jacoba Bernoullija[1] (čak je s njegovim bratom Johannom[2] neko vrijeme i živio kod njega). Interes Eulera za matematiku potaknuo je njegov otac, koji mu je doduše namijenio svećeničku karijeru, a tokom privatne poduke (koju je tražio sam Leonhard) Eulerove matematičke sposobnosti otkrio je Johann Bernoulli. Iako je počeo studirati teologiju, uz pomoć Johanna Bernoullija uspio je dobiti suglasnost oca da prijeđe na studij matematike. Studij je (u Baselu) završio

[1] Jacob Bernoulli, 1654.-1705., švicarski matematičar, prvi je koristio naziv integral, bavio se raznim primjenama integralnog računa i diferencijalnih jednadžbi.

[2] Johann Bernoulli, 1667.-1748., mlađi brat Jacoba, također je dao značajne doprinose u matematičkoj analizi.

1726. Tad je već objavio prvi znanstveni rad, a godinu kasnije radom o najboljem rasporedu jarbolâ na brodu osvojio je drugo mjesto u natječaju za *Grand Prix* Pariške akademije znanosti.

Kad je Nicolaus(II) Bernoulli[3] umro u u St. Petersburgu u srpnju 1726., tamo se (na akademiji znanosti) oslobodilo mjesto predavača iz primijenjene matematike i mehanike. To je mjesto ponuđeno Euleru, koji ga je i prihvatio. Iako je prvotno trebao dobiti mjesto na odjelu fiziologije, Daniel Bernoulli[4] i Jakob Hermann[5] uspjeli su postići da dobije mjesto na matematičko-fizičkom odjelu. U St. Petersburgu Euler je imao idealno znanstveno okruženje, a s Danielom Bernoullijem je ne samo surađivao, nego i živio. Do 1730. kad je postao profesor fizike i time punopravni član akademije, Euler je iz financijskih razloga služio i kao medicinski časnik u ruskoj mornarici. Daniel Bernoulli napustio je St. Petersburg 1733., te je Euler naslijedio njegovo profesorsko mjesto iz matematike. Bolje financijsko stanje omogućilo mu je da se oženi s Katharinom Gsell, kćeri slikara s gimnazije u St. Petersburgu. I ona je bila iz švicarske obitelji, a imali su trinaestero djece od kojih je samo pet doživjelo odraslu dob. Euler je jednom izjavio da je neka od svojih najvećih matematičkih otkrića imao držeći jedno dijete na rukama, dok su se druga oko njega igrala. Bilo kako bilo, njegovi rezultati iz početka 1730ih godina su impresivni: bavio se praktičnim inženjerskim pitanjima, kartografijom, teorijom brojeva, matematičkom analizom i mehanikom, a pritom je u mnogima od tih područja postavio temelje kasnijeg razvoja.

Od 1735. počeo je imati ozbiljne zdravstvene probleme. Tada je prvo jedva ostao živ nakon jednog ozbiljnog napada groznice, a zatim je nekoliko godina kasnije počeo slijepiti. Do 1740. potpuno je izgubio vid na jednom oku, a i drugo nije bilo dobro. S druge strane, tada je već imao iznimno visok znanstveni ugled, posebice nakon što je 1738. i 1740. osvojio *Grand Prix* pariške akademije znanosti. Dobio je ponude da prijeđe u Berlin, koje je isprva odbio, no nakon što su pozicije stranaca u Rusiji nakon političkih nemira postale teže, 1741. je prihvatio poziv Friedricha Velikog te se zaposlio na berlinskoj akademiji znanosti. U pismu prijatelju tom je prilikom napisao: *Mogu raditi što želim*[6]*... Kralj me zove svojim profesorom i mislim da sam najsretniji čovjek na svijetu.* Euler je bio neumoran i iznimno je doprinio boljitku akademije baveći se najrazličitijim praktičnim zadacima (čak je bio savjetnik vlade oko državnih lutrija, osiguranja, mirovina i artiljerije). Uza sve to, bio je izvanredno znanstveno produktivan: u 25 godina u Berlinu napisao je oko 380 članaka, te više knjiga o varijacijskom računu, proračunavanju orbita planeta, artiljeriji i balistici, matematičkoj analizi, gradnji brodova i navigaciji, kretanju mjeseca, pa čak i popularnoznanstveno djelo *Pisma jednoj njemačkoj princezi.*

Godine 1766. vratio se u St. Petersburg, ponajviše radi prevelikog miješanja kralja u poslove akademije. Ubrzo zatim postao je potpuno slijep, a 1771. mu je dom uništen u požaru, a pritom je uz svoj život uspio spasiti samo svoje matematičke rukopise. Usprkos sljepoći, iznimno dobro pamćenje omogućilo mu je da nastavi znanstveni rad te je u tom razdoblju objavio gotovo polovinu svih svojih djela. U

[3]Nicolaus (II) Bernoulli, 1695.-1726., sin Johanna.

[4]Daniel Bernoulli, 1700.-1782., sin Johanna, dao je bitne doprinose u fizici te u primjeni diferencijalnog računa na teoriju vjerojatnosti.

[5]Jakob Hermann, 1678.-1733., švicarski matematičar i fizičar, rođak Leonharda Eulera.

[6]Misli se: u istraživanjima.

tome su mu najviše pomogla dva sina te nekoliko kolega, s kojima je raspravljao o znanstvenim problemima i koji su mu pomogli zapisivati proračune i rezultate. 18. rujna 1783. Euler je pola dana proveo na uobičajen način — podučavajući jednog unuka matematici, proračunavajući putanje balona i raspravljajući o otkriću planeta Urana — a u pet sati popodne nakon krvarenja u mozgu izjavio je "Umirem.", izgubio svijest i umro oko šest sati kasnije. Nakon njegove smrti, St. Petersburgška akademija nastavila je objavljivati njegove neobjavljene radove još gotovo pedeset godina.

Euler je bio jedan od najproduktivnijih matematičara svih vremena. Može se reći da je Euler "stvorio velik dio analize i revidirao gotovo sva područja teorijske matematike poznate u njegovo doba, dodajući nedostajuće detalje i dokaze, i sređujući sve to skupa u konzistentan oblik." (citirano iz [1], slobodan prijevod autora). Nemoguće je dati kratak pregled njegovih rezultata, pa čak ni onih najvažnijih, te ćemo se ograničiti na one koji su vezani za osnovno- i srednjoškolsku nastavu matematike.

Mnoge danas uobičajene oznake potječu od Eulera: $f(x)$ za funkciju (1734.), e kao oznaka baze prirodnog logaritma (1727., danas e zovemo Eulerovim brojem[7]), i za imaginarnu jedinicu (1777.) i $\sum$ za sumaciju (1755.) i mnoge druge.

U teoriji brojeva, Euler je pokazao da Fermatova[8] hipoteza da su brojevi oblika $2^n + 1$ uvijek prosti ako je n potencija od 2 nije točna. Euler ju je provjerio za $n = 1, 2, 4, 8$ i 16, a zatim je pokazao da je $2^{32} + 1 = 4294967297$ djeljiv s 641, dakle nije prost. Bavio se i drugim nedokazanim Fermatovim rezultatima. Uveo je **Eulerovu φ-funkciju**: za prirodan broj n je $\varphi(n)$ je broj brojeva manjih od n koji su s njim relativno prosti[9], Zatim je poopćio Fermatov mali teorem na **Eulerov teorem**: Za broj a relativno prost s n je $a^{\varphi(n)} - 1$ djeljivo s n. Našao je i 60 parova prijateljskih[10] brojeva. Dokazao je i specijalan slučaj velikog Fermatovog teorema: jednadžba $x^3 + y^3 = z^3$ nema rješenja (x, y, z) u kojima bi x, y i z bili prirodni brojevi. Još jedna Fermatova tvrdnja koju je Euler dokazao je: ako su a i b dva relativno prosta prirodna broja, onda $a^2 + b^2$ nema djeljitelja oblika $4n - 1$.

Euler je puno doprinio formaliziranju pojma funkcije, iako je njegova definicija još vrlo daleko od suvremene. U knjizi koja predstavlja osnove suvremene matematičke analize, *Introductio in analysin infinitorum* (1748.), kaže: *Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.* Nije definirao što misli pod "analitički izraz", već je podrazumijevao da će čitatelj shvatiti da se radi o izrazu formiranom pomoću uobičajenih matematičkih operacija. Euler je prvi tvrdio da je matematička analiza područje koje se bavi analitičkim izrazima i posebno funkcijama.

[7]Eulerov broj $e \approx 2{,}718$ ne valja miješati s Eulerovom (ili Euler-Mascheronijevom) konstantom γ, koja je limes razlika između parcijalnih suma harmonijskog reda i prirodnog logaritma od broja članova takve parcijalne sume, tj. $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0{,}577$.

[8]Pierre de Fermat, 1601.-1665., francuski pravnik i hobi-matematičar, dao je niz važnih rezultata u diferencijalnom računu i teoriji brojeva, od kojih je najznamenitiji Veliki Fermatov teorem, kojeg nije znao dokazati, nego je dokazan tek 1995.

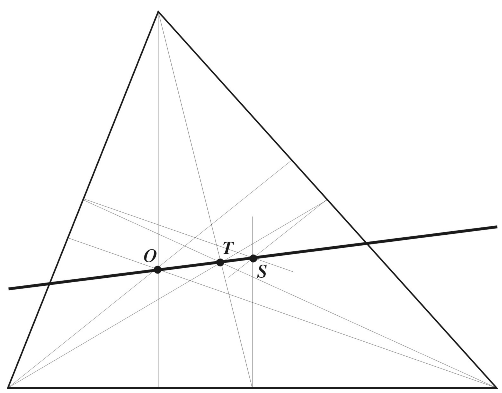
[9]Dva broja su relativno prosti ako im je najveći zajednički djeljitelj 1.

[10]Par prirodnih brojeva je prijateljski ako je svaki od ta dva broja jednak zbroju svih pravih djelitelja drugog broja.

Mnogi rezultati iz planimetrije također su Eulerovi. Tako je poznat **Eulerova formula za trokute**: ako je d udaljenost između središta trokutu opisane i upisane kružnice te ako je R polumjer trokutu opisane, a r polumjer trokutu upisane kružnice, onda vrijedi

$$d^2 = R(R - 2r).$$

Kako d^2 ne može biti negativan, jednostavna posljedica ovog teorema je **Eulerova nejednakost** $R \geq 2r$. Po Euleru se zovu i **Eulerova kružnica** i **Eulerov pravac**. Za svaki trokut, Euler je pokazao da nožišta visina i polovišta stranica leže na jednoj kružnici, koja se danas zove Eulerova kružnica trokuta. Karl Wilhelm von Feuerbach (1800.-1834.) je dokazao da na njoj leže i polovišta spojnica vrhova s ortocentrom, pa je kružnica poznata i kao Feuerbachova kružnica. Euler je pokazao i da su za svaki trokut ortocentar, težište, središte opisane i središte Eulerove kružnice kolinearni, a pravac na kojem se te četiri točke nalaze danas se zove Eulerov pravac trokuta (vidi sliku 4).



Slika 4. Eulerov pravac prolazi kroz ortocentar, težište i središte trokutu opisane kružnice.

U trigonometriji, Euler je uveo suvremeno označavanje sinusa i kosinusa kao sin i cos, a što je još važnije, on je trigonometrijske funkcije kao prvi u povijesti razmatrao kao funkcije, a ne kao geometrijske veličine. Čak štaviše, Euler je otkrio vezu između eksponencijalne i trigonometrijskih funkcija. To je znamenita *Eulerova formula*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Kako je sinus ispruženog kuta jednak nuli, a kosinus jednak -1, za $\theta = 180^\circ = \pi$ gornja formula (nakon prebacivanja svih članova na lijevu stranu) poprima oblik

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Mnogi upravo zapisanu formulu smatraju najljepšom matematičkom formulom jer povezuje pet najznamenitijih brojeva: 0, 1, e, π te i. Gornju vezu eksponencijalne funkcije sa sinusom i kosinusom Euler je otkrio razmatrajući redove potencija. Redovi su beskonačne sume i neke su razmatrali još srednjevjekovni matematičari, primjerice d'Oresme[11] je u 14. stoljeću zaključio da harmonijski red $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ divergira, tj. da zbrajanjem njegovih članova možemo premašiti svaki zamišljeni broj. Redovi potencija su pak redovi u kojima članovi koje zbrajamo sadrže potencije nepoznanice[12] i uz određene uvjete mnoge matematičke funkcije se mogu zapisati u obliku reda potencija. Primjerice,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

gdje je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n faktorijela[13]). Iako se zapisivanje funkcije poput eksponencijalne, sinusa ili kosinusa u obliku reda potencija može činiti nepotrebnim kompliciranjem, taj zapis je od velike koristi jer omogućuje da takve funkcije aproksimiramo jednostavnijim funkcijama: polinomima. To činimo tako da uzmemo samo dio sume do nekog mjesta (tzv. parcijalnu sumu), a pritom je moguće procijeniti i grešku odbacivanja ostatka sume, što je od velike koristi u mnogim primjenama kad su nam dovoljni približni rezultati. Iako su redove potencija razmatrali matematičari prije Eulera (Newton, Leibniz, Taylor, Maclaurin), Euler je dobio mnoge nove rezultate, a među prvima je istakao važnost konvergencije reda, tj. smislenosti pridruživanja konkretnog broja cijeloj beskonačnoj sumi.

Upravo rad na redovima je Euler donio slavu u mladim danima, kad je riješio poznati Baselski problem: koliko iznosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots.$$

S tim problemom su se bezuspješno bavili mnogi matematičari, primjerice Jacob, Johann i David Bernoulli, Leibniz i de Moivre, a Euler je 1735. pokazao da gornja suma iznosi $\frac{\pi^2}{6}$. Čak štaviše, Euler je izračunao i sume $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ za $s = 4, 6, 8, 10$ i 12. Uz to je dokazao i da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prost}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Danas se vrijednost $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ označava sa $\zeta(s)$, a svojstva tako definirane i na skup kompleksnih brojeva (osim 1) proširene funkcije ζ sadržaj su jednog od najznamenitijih otvorenih problema matematike danas: Riemannove hipoteze.

Moglo bi se još mnogo pisati o Eulerovim rezultatima, no negdje treba i stati, pa ćemo to učiniti ovdje i za kraj dati dva zadatka koji potječu od Eulera.

- Nađite sva racionalna rješenja jednadžbe $x^y = y^x$.

[11] Nicole d'Oresme, 1323.-1382., francuski biskup, jedan od najznačajnijih srednjevjekovnih znanstvenika.

[12] Formalnije, red potencija je red oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, gdje je (a_n) neki niz, a c konstanta.

[13] Euler je poopćio faktorijele i na realne brojeve, odnosno uveo je gama-funkciju $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Za prirodne brojeve n vrijedi $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- Dokažite da za svaki četverokut vrijedi: zbroj kvadrata stranica jednak je zbroju kvadrata dijagonala uvećanom za četverostruki kvadrat dužine koja spaja polovišta dijagonala.

Literatura

[1] W. W. R. BALL, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publ., New York, 1960.

[2] F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations I, II*, Dover Publ., New York, 1993.

[3] A. G. KONFOROWITSCH, *Guten Tag, Herr Archimedes*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1996.

[4] E. W. WEISSTEIN, *Euler Line*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/EulerLine.html`

[5] E. W. WEISSTEIN, *Euler Triangle Formula*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/EulerTriangleFormula.html`

[6] E. W. WEISSTEIN, *Nine-Point Circle*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html`

[7] Mac Tutor History of Mathematics Archives: Leonhard Euler, `http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Euler.html`

[8] Wikipedia: Leonhard Euler, `http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler`