$^{\pi}\mathrm{l}\alpha\sqrt[y]{\mathbf{mat}\chi}$

Horner i računalo

Ivo Sluganović

William George Horner, engleski matematičar, živio je na prijelazu iz 18. u 19. st. Pohađao je *Kingswood School* u Bristolu, a već sa 14 godina postao je asistent u istoj školi, da bi sa nevjerojatnih 18 godina postao ravnatelj. O njemu nije ostalo puno podataka, ali su mu kasniji matematičari pripisali otkriće vrlo bitnog algoritma koji je po njemu dobio ime. Horner ga je otkrio 1819. godine, iako ga je talijanski matematičar **Ruffini** znao već 1804. godine, a u vrlo sličnom obliku bio je poznat već i kineskim i nekim srednjovjekovnim matematičarima.

Njemu pripisan algoritam **najefikasniji** je algoritam (korišten u računarstvu) za izračunavanje vrijednosti polinoma u nekoj točki.

Dijeljenje polinomom

O kakvom se algoritmu radi? Hornerov algoritam koristimo kako bismo vrlo jednostavno podijelili polinom P polinomom $Q(x) = x - \alpha$. Na isti način možemo izračunati i vrijednost polinoma u nekoj točki.

Polinomi P i Q najčešće se zapisuju ovako:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ Q(x) &= x - \alpha. \end{aligned}$$

Primjera radi, neka je

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 2x^2 - x - 1, \\ Q_0(x) &= x - 1. \end{aligned}$$

Znamo (po teoremu o dijeljenju s ostatkom) da postoje **jedinstveni** polinomi S i R, takvi da je

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x),$$

pri čemu je R nulpolinom, $R(x) = c$, a S polinom $n-1$-vog stupnja, $S(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Sada imamo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)(x - \alpha) + c \qquad (*)$$

Kod našeg primjera to je

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 = (x^2 + 3x + 2)(x - 1) + 1,$$

dakle $S_0(x) = x^2 + 3x + 2$ i $R_0(x) = 1$.

Nakon množenja, izraz $(*)$ postaje:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 - \alpha b_1)x + (c - \alpha b_0).$$

Da bi dva polinoma bila ***jednaka***, oni moraju biti **istog stupnja**, i svi odgovarajući koeficijenti moraju im biti **jednaki**, iz čega slijedi da je:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - \alpha b_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - \alpha b_{n-2} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0 - \alpha b_1 \\ a_0 &= c - \alpha b_0. \end{aligned}$$

Sada vidimo da možemo vrlo lako izračunati vrijednost koeficijenta ako znamo b_{i-1} i a_{i-1}. Napravimo ovakvu tablicu:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & c \end{array}$$

U prvi red upišemo koeficijente polinoma P, a drugi red popunjavamo.

Na mjesto b_{n-1} prepišemo vrijednost polja iznad,

a svaki slijedeći koeficijent dobivamo tako da pomnožimo vrijednost polja neposredno lijevo s α i tome dodamo vrijednost polja neposredno iznad.

Primjer 1. Odredimo količnik i ostatak pri dijeljenju polinoma

$$P_1(x) = 5x^4 - 2x^3 + x + 6$$

polinomom $Q_1(x) = x + 3$. Tablica sada izgleda ovako:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & & & & & \end{array}$$

Ne smijemo **zaboraviti** upisati nulu da ne preskočimo u četvrti stupac, jer je koeficijent ispred x^2 zapravo 0. U drugi red prepišemo 5, a svaki sljedeći broj dobijemo tako da broj neposredno lijevo pomnožimo sa -3 i pribrojimo mu broj neposredno iznad.

$$\rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & & & & \end{array} \qquad \rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & -3\cdot 5 - 2 & & & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & -17 & -3\cdot(-17)+0 & & \end{array} \qquad \rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & -17 & 51 & -3\cdot 51+1 & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & -17 & 51 & -152 & -3\cdot(-152)+6 \end{array} \qquad \rightarrow \begin{array}{c||c|c|c|c|c} & 5 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 5 & -17 & 51 & -152 & 462 \end{array}.$$

Znači

$$5x^4 - 3x^4 + x + 6 = (5x^3 - 17x^2 + 51x - 152)(x+3) + 462.$$

Hornerov algoritam u računarstvu

Hornerov algoritam možemo vrlo jednostavno primijeniti i na **računanje vrijednosti polinoma u nekoj točki**. Neka je zadan polinom:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

i točka x_0 u kojoj želimo izračunati vrijednost polinoma P.

Vrijednost polinoma P u točki x_0 jednaka je

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0.$$

Primijetimo da prethodni zapis možemo napisati kao:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= (a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \ldots + a_2 x_0 + a_1)x_0 + a_0 \\ &= ((a_n x_0^{n-2} + a_{n-1}x_0^{n-3} + \ldots + a_2)x_0 + a_1)x_0 + a_0 \\ &\vdots \\ &= (\ldots((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \ldots + a_1)x_0 + a_0. \end{aligned}$$

Ako ga usporedimo s Hornerovim algoritmom za dijeljenje polinoma, vidimo da je izraz $a_n x_0 + a_{n-1}$ jednak b_{n-2} (kad je $\alpha = x_0$). To opet množimo sa x_0 i rezultatu pribrajamo a_{n-2} te dobivamo b_{n-3}... Postupak je zapravo **identičan** dijeljenju polinoma P polinomom $x - x_0$. Iz ovoga bi trebalo slijediti da je ostatak dijeljenja polinoma P polinomom $x - x_0$ zapravo jednak vrijednosti polinoma P u točki x_0. To možemo vrlo jednostavno pokazati:

$$P(x) = S(x)(x - x_0) + c$$

Kada je $x = x_0$, izraz postaje:

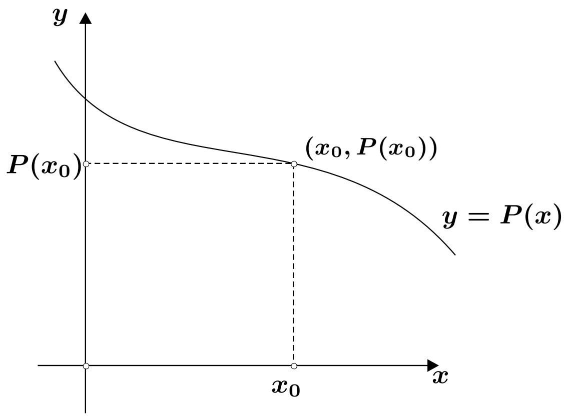
$$\begin{aligned} P(x_0) &= S(x_0)(x_0 - x_0) + c, \\ &= 0 + c = c. \end{aligned}$$

Dobili smo da je $c = P(x_0)$.

Hornerov algoritam, osim što je vrlo brz i koristi mali broj jednostavnih operacija [1], zapravo je najlakši način za računanje vrijednosti polinoma, kako ručno, tako i u raznim programskim jezicima.

Primjer pseudokoda:

//učitavanje točke x0
učitaj(X_0);
//kofecijenti polinoma
učitaj$(A[0], \dots, A[N])$;
$Y = A[N]$;
za $I = N - 1$ *do* 0 **radi**
⌊ $Y = Y \cdot X_0 + A[I]$;
vrati(Y);



Slika 1.

Ponešto o broju operacija

Ovaj algoritam za polinom stupnja n, kako bi izračunao vrijednost u točki x_0, obavi n operacija zbrajanja i n operacija množenja. (Prevedeno na jezik džepnog računala, koristeći ovaj algoritam tipku $\boxed{+}$ stisnut ćete n, a tipku $\boxed{\times}$ također n puta.)

Kad bi smo polinom računali član po član: prvo $a_n x^n$, onda $a_{n-1}x^{n-1}$, $\dots a_0$ i to sve zbrojili, trebalo bi nam $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ množenja i n zbrajanja.

Za $n = 10$ Hornerovim algoritmom uštedjeli smo 656 operacija množenja.

Čemu sve to?

Za izračunavanje vrijednosti polinoma (tj. aproksimaciju funkcije) u nekoj točki koristimo Hornerov algoritam budući da se mnoge funkcije izračunavaju tako da se aproksimiraju polinomom.

Literatura

[1] Bašić M., *Problemi s polinomima*, *PlayMath* br. **9** (2005.)

[2] Svedrec R., *Hornerov algoritam*, Matka br. **37** (2002.), HMD, Zagreb

[3] Drmač Z., Hari V. i dr., *Numerička analiza*, PMF-MO, Zagreb, 2003.
`http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf`

[4] Pavković B., Veljan D., *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[1] Dokazano je da Hornerov algoritam koristi optimalan broj jednostavnih operacija. Za računanje vrijednosti polinoma u više točaka postoje algoritmi koji ukupno koriste manji broj operacija od ponavljanja Hornerovog algoritma više puta, ali oni su značajno kompliciraniji i teže razumljivi.