

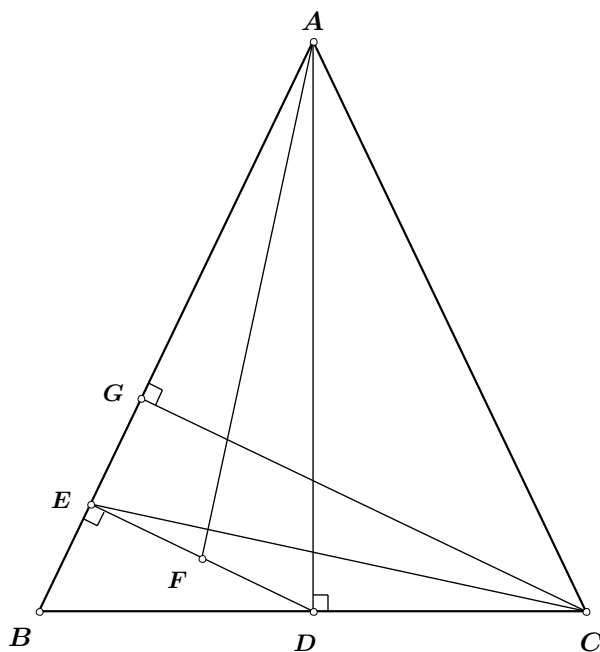
Poopćenje jednog geometrijskog zadatka

Adrian Satja Kurdija

Na Državnom natjecanju mladih matematičara 2006. godine, 2. zadatak za treći razred (A kategorija) glasio je:

U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima \overline{AB} i \overline{AC} , D je polovište osnovice \overline{BC} . Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu \overline{AB} , te F polovište dužine \overline{DE} . Dokaži da je AF okomito na EC .

Rješenje. Iz točke C povucimo okomicu na stranicu \overline{AB} , i dobivenu točku označimo sa G (vidi sliku 1.).



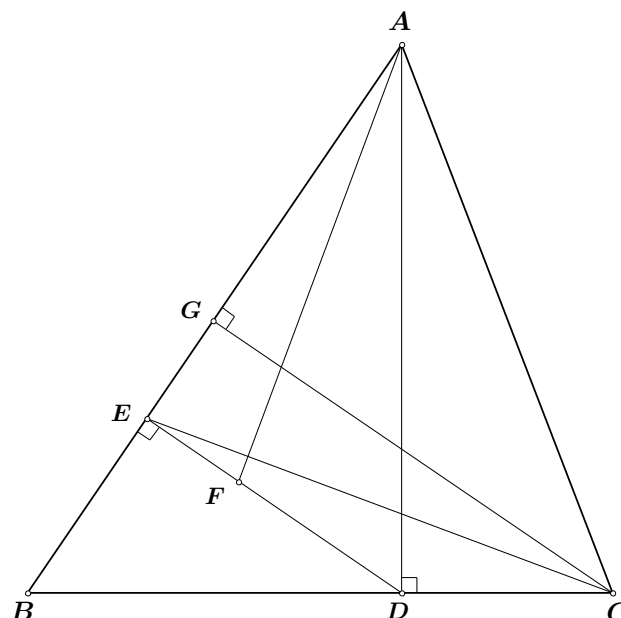
Slika 1.

Uočimo najprije da je dužina \overline{DE} srednjica trokuta BCG , pa je zato točka E polovište dužine \overline{BG} . Trokuti BCG i AED su slični ($\angle CGB = \angle AED = 90^\circ$ i $\angle BCG = 90^\circ - \angle GBC = 90^\circ - \angle ABD = \angle DAE$) i stranice su im međusobno okomite, odakle slijedi da su im i odgovarajuće težišnice međusobno okomite tj. da je $AF \perp EC$. ✓

Sada pokušajmo poopćiti taj zadatak, i to tako da naš trokut ne bude jednakokračan. Poopćeni zadatak glasi ovako:

U šiljastokutnom trokutu ABC , D je nožište visine iz vrha A na stranicu \overline{BC} . Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu \overline{AB} , te F točka na stranici \overline{DE} takva da je $|DF| : |FE| = |BD| : |DC|$. Dokaži da je AF okomito na EC .

Rješenje. Princip rješavanja sličan je kao i u početnom zadatku. Iz točke C povucimo okomicu na stranicu \overline{AB} , i dobivenu točku označimo sa G (vidi sliku 2.).



Slika 2.

Uočimo najprije da je omjer $|BD| : |DC|$ jednak omjeru $|BE| : |EG|$. Slično kao i u početnom zadatku, trokuti BCG i AED su slični i stranice su im međusobno okomite. Dužine \overline{AF} i \overline{EC} više nisu težišnice tih trokuta, ali ipak imaju nešto zajedničko - njihove krajnje točke E i F dijele stranice BG i DE u jednakim omjerima ($|BE| : |EG| = |DF| : |FE|$). Iz tog razloga su trokuti CEG i AEF slični, a kako su dva para njihovih stranica okomita ($\overline{CG} \perp \overline{AE}$ i $\overline{EG} \perp \overline{EF}$) slijedi da su okomite i stranice \overline{AF} i \overline{EC} , što je i trebalo dokazati. ✓

Za vježbu, pokušajte formulirati i riješiti zadatak u slučaju kada trokut ABC nije nužno šiljastokutan.