Kako dobiti auto umjesto koze

Tvrtko Tadić

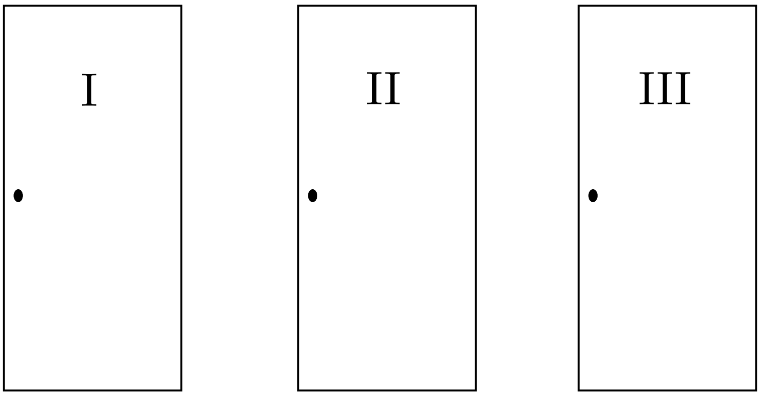
U ovom prilogu osvrnut ćemo se na jedan poznati problem (*elementarne*) teorije vjerojatnosti. Čitatelji su se već imali prilike s ovim zadatkom sresti u [2]. Problem je poznat pod nazivom *Problem auta i dviju koza.*

Let's Make a Deal

Od 1963. do 1986. godine u SAD-u na televizijskoj mreži NBC prikazivala se popularna zabavno-nagradna emisija *Let's Make a Deal*[1] s mnogo zanimljivih trenutaka: trgovanja, ponuda, zamjena.... U novije vrijeme emisija se povremeno prikazuje na televiziji, te je i dalje popularna. Završni dio emisije doveo je do problema koji ćemo proučavati.

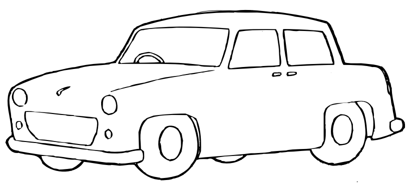
Problem

Na kraju emisije voditelj bi izveo natjecatelja pred troja vrata (označenih sa brojevima I, II i III).



Monty Hall - voditelj

Iza jednih vrata nalazi se auto, a iza ostalih koza. Voditelj bi zamolio natjecatelja da izabere jedna vrata. Nakon što bi natjecatelj izabrao, voditelj otvara jedna od vrata iza kojih se nalazi koza i pita natjecatelja ***želi li promijeniti vrata koja je izabrao***.



Postavlja se pitanje treba li natjecatelj promijeniti prijašnji izbor, ostati pri njemu ili to nije važno?

Većina ljudi zaljučivala je na sljedeći način: vjerojatnost da se iza nekih vrata nalazi auto ista je bez obzira na to koja vrata odaberemo. Stoga je svejedno promijenimo li početni izbor vrata ili ne.

[1] Problem je poznat i kao *Monty's dilemma* po voditelju i autoru emisije **Monty Hallu**.

Provedimo pokus

U matematici, ne koristimo pokuse za otkrivanje točnih odgovora (za razliku od kemije, fizike ...). U teoriji vjerojatnosti zahvaljujući **zakonu velikih brojeva**[2] odgovor možemo *naslutiti*.

Pokus bismo mogli provesti imitirajući pravu emisiju, no za to bi nam trebale dvije osobe, dosta vremena i strpljenja i precizno bilježenje rezultata. Umjesto toga napravit ćemo računalnu simulaciju. Računalne simulacije nisu potpuno identične slučajnim događajima, ali ih dovoljno dobro oponašaju.

Simulaciju ćemo napraviti u MAPLE-u[3].
Na trenutak zanemarimo pitanje zamjene odabranih vratiju i analizirajmo problem. Imamo 2 slučajna događaja: izbor vrata iza kojih će stajati auto i natjecateljev (prvi) izbor vrata.

Ovo možemo promatrati na sljedeći način:
- organizatori emisije (slučajno) biraju vrata od 1 do 3 iza kojih će staviti auto (iza preostalih vrata stavljaju koze), redni broj tih vrata označimo s a;
- natjecatelj pogađa vrata od 1 do 3 iza kojih misli da se nalazi auto; taj broj označimo s n.

Odlučimo se za promjenu prvotnog izbora. Ako je $a = n$ tada dobivamo kozu (bez obzira koja vrata s kozom otvori voditelj), a ako je $a \neq n$ tada će voditelj otvoriti preostala vrata iza kojih se nalazi koza i konačnim izborom dobivamo auto.

Provedimo to sada na računalu. Prvo ćemo uvesti proceduru `izbor` koja će nasumce izvlačiti broj od 1 do 3.

```
> izbor:=rand(1..3):
```

Procedura `zamjena` ispitivati će jesmo li zamjenom dobili auto (tada vraća 1) ili smo ga izgubili (kada vraća 0).

```
> zamjena:=proc(a,n)
> if n=a then 0
> else 1
> end if;
> end proc:
```

Incijaliziramo brojače koji pokazuju koliko puta smo promjenom (prvotnog) izbora vrata dobili auto, a koliko kozu.

```
> auto:=0:  koza:=0:
```

Sada ćemo pokus (simulaciju igre) provesti 30000 puta:

```
> for i from 1 to 30000 do
> a:=izbor():  n:=izbor();
> if zamjena(a,n)=1 then auto:=auto+1:
> else koza:=koza+1:
> end if:
> end do:
```

Pogledajmo koliko puta smo dobili auto, a koliko puta kozu.

```
> auto;
```

$$20041$$

```
> koza;
```

$$9959$$

```
> evalf(auto/30000);
```

$$0.6680333333$$

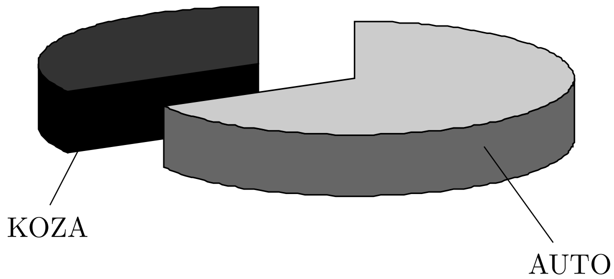
```
> evalf(koza/30000);
```

$$0.3319666667$$

Ove rezultate dobili smo za 4.6 sekundi. (☺ Zamislite koliko bi nam trebalo da 30000 pokusa napravimo bez računala.)

[2] Vidi prilog: *Zakon velikih brojeva i Loto*, *PlayMath* br. 10(2006.), str 33-35.

[3] Radi jednostavnosti koda simulaciju radimo u MAPLE-u. Slično se moglo napraviti i u drugim programskim jezicima Pascal-u,C-u,...



Slika 1.

Promjenom izbora vrata auto smo dobili u $66.8\% \approx \frac{2}{3}$ slučajeva.

Koliko bismo puta dobili auto da nismo napravili promjenu prvotnog izbora vrata? To ćemo ispitati na isti način kao prije jedino će u prethodnom programu se ispitivati je li `zamjena(a,n)=0`.

```
> auto:=0:  koza:=0:
> for i from 1 to 30000 do
> a:=izbor():  n:=izbor();
> if zamjena(a,n)=0 then auto:=auto+1:
> else koza:=koza+1:
> end if:
> end do:
> auto;
```

$$9947$$

```
> koza;
```

$$20053$$

```
> evalf(auto/30000);
```

$$0.3315666667$$

```
> evalf(koza/30000);
```

$$0.6684333333$$

A ko nismo promijenili izbor auto dobivamo u $33.15\% \approx \frac{1}{3}$ slučajeva.

Ovolika razlika nikako ne može biti slučajna (osim ako nije riječ o velikoj grešci u mjerenju). Stoga naslućujemo da je početni zaključak kako je svejedno promijenimo li početni izbor ili ne **pogrešan**.

Mogući ishodi

Moguće ishode emisije možemo označiti sa (a, n), gdje broj $a \in \{1, 2, 3\}$ označava vrata iza kojih se nalazi auto, a broj $n \in \{1, 2, 3\}$ vrata koja je (prvotno) odabrao natjecatelj. Mogućih ishoda ima 9:

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{array}$$

Pretpostavimo da su svi ovi ishodi jednako mogući. Promjena ili ostavljanje prvotno odabranih vratiju neće utjecati na ishode.

Ako ne zamijenimo prvotno odabrana vrata, povoljni ishodi emisije za nas su:

$$(1,1),\ (2,2) \text{ i } (3,3).$$

Stoga je vjerojatnost dobitka auta ako nismo promijenili prvotnu odluku jednaka

$$\mathrm{P}(\textit{'dobitak auta bez promjene prvotne odluke'}) = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH ISHODA}}{\text{BROJ MOGUĆIH ISHODA}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Recimo da se odlučimo za promjenu prvotno odabranih vrata. Koji su nam ishodi povoljni? Kao što smo već rekli, oni u kojima smo prvotnim odabirom vrata odabrali vrata iza kojih se nalazi koza, tj. takvi ishodi (a, n) za koje je $a \neq n$. Povoljnih ishoda ima 6:

$$(1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2).$$

Stoga je vjerojatnost dobitka auta ako smo promijenili prvotnu odluku jednaka

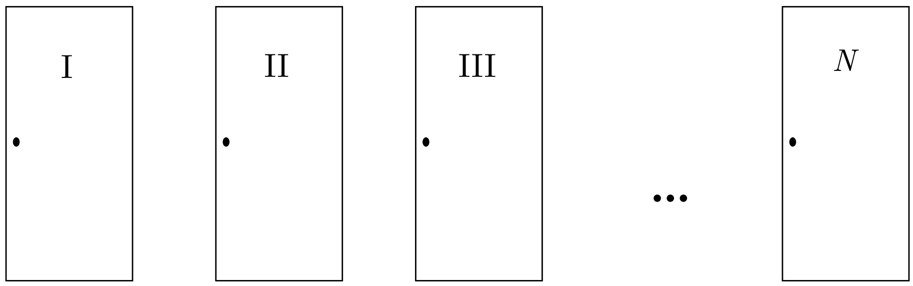
$$\mathrm{P}(\textit{'dobitak auta uz promjenu prvotne odluke'}) = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH ISHODA}}{\text{BROJ MOGUĆIH ISHODA}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ako promijenimo izbor vrata, vjerojatnost da ćemo dobiti auto iznosit će $\frac{2}{3}$, a ako ne promijenimo izbor vjerojatnost dobitka će biti $\frac{1}{3}$. Ovaj rezultat *slaže* se s rezultatima naše simulacije. Dakle, promjenom prvotnog izbora vrata vjerojatnost dobitka auta će se **udvostruičiti!** Odgovor na početno pitanje je: veća je vjerojatnost da igrač osovoji auto ako promijeni početni izbor.

Malo poopćenje

U matematici često pokušavamo poopćiti neke pojave. Zašto bi broj vrata bio samo 3? Neka broj vrata bude n.

Recimo da imamo $n \geq 3$ vrata (iza jednih je auto, a iza ostalih su koze). Mi odabiremo jedna od njih, a voditelj nam otvara $n-2$ vrata koje nismo odabrali iza kojih se nalaze koze. Preostala su dvoja vrata. Voditelj ponovo nudi zamjenu odabira vrata. Isplati li se zamijeniti?



Poučeni prethodnim iskustvom većina onih koji su, kad smo prvi put postavili ovo pitanje, rekli: ,,*Nema veze*" sada vjerojatno nisu tako sigurni. Uz slično zaključivanje kao prije, ako se odlučimo ne promijeniti vrata, vjerojatnost da dobijemo auto je $\frac{1}{n}$, a ako ih promijenimo vjerojatnost je $\frac{n-1}{n}$.

Za $n = 5$ to bi značilo da promjenom odabira vrata vjerojatnost dobitka auta raste na 80%. ☺
Što je n veći, zamjena početnog izbora vratiju se više isplati.

Osvrt

Za kraj pozivam čitatelje da sljedeći put kad igraju igre na sreću razmisle: *Mogu li povećati svoje izglede za pobjedu? Na koji je način bolje igrati?* Ako dođu do zanimljivih otkrića, neka pošalju prilog u *PlayMath*, kako bi i ostali doznali. Ovaj problem i danas, 20 godina kasnije, i dalje izaziva dvojbe i rasprave. Sve zainteresirane pozivam da pogledaju članak [1] u kojem su navedene još neke modifikacije i poopćenja ovog problema.

Literatura

[1] Georges J. P., Craine T. V., *Generalizing Monty's dilemma*, Quantum, vol. **5** nr. **4** (1995), NSTA, Arligton

[2] Šikić Z., *Velika nagrada*, Matka br. **31** (1999./2000.) i **36** (2000./2001.), HMD, Zagreb

[3] *Let's Make A Deal Home Page* `http://www.letsmakeadeal.com/`