Školsko natjecanje iz matematike 2005./2006.

V. gimnazija
21. I. 2006.

I prošle školske godine organizirano je školsko natjecanje učenika V. gimnazije. Na daljnja natjecanja uspješno se plasiralo oko 30 učenika iz svakog razreda.

Prvi razred

1. Izraz $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ napiši u obliku umnoška.

2. Pojednostavni:
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

3. Učenici jednog razreda uče dva strana jezika - engleski i njemački. Engleski jezik uči 75% a njemački jezik 87.5% učenika tog razreda. Ako svaki učenik uči barem jedan strani jezik koliko posto učenika uči oba strana jezika? Ako se zna da je u razredu više od 25 a manje od 40 učenika, koliko u tom razredu ima učenika?

4. Nađi rješenja jednadžbe $\dfrac{3ax-5}{ax+3a-x-3}-\dfrac{3a-1}{1-a}=\dfrac{2x+7}{x+3}$ i provedi raspravu (diskusiju) u ovisnosti o realnom parametru a.

5. Oko vrhova trokuta sa stranicama duljina $a>b>c$ opisane su kružnice koje se međusobno dodiruju. Izračunaj duljinu polumjera najveće od tih triju kružnica (izrazi ga pomoću duljina a,b,c).

Drugi razred

1. Neka je $ABCD$ paralelogram. Konstruirani su slični pravokutni trokuti ADF i CED izvan paralelograma (kutovi $\angle FAD$ i $\angle DCE$ su pravi, $\angle CED=\angle ADF$). Dokaži da su pravci BE i BF okomiti.

2. Skiciraj skup točaka u kompleksnoj ravnini kojima pripadaju kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uvjet: z^2+z+1 je pozitivan broj

3. Zadana je jednadžba:
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}=1,$$
$a\in\mathbb{R}, x\neq a, x\neq 2a$.
   (a) Pokaži da jednadžba ima realna rješenja za svaki $a\in\mathbb{R}$.
   (b) Neka je k realan broj. Odredi $a\in\mathbb{R}$ tako da bude $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=k$ i provedi diskusiju.

4. Za koje cijele brojeve k kvadratna jednadžba $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ ima racionalne korijene?

5. Dva igrača A i B igraju ovu igru: A kaže neki broj $x\in[1,10]$. B tada zamisli broj iz $[1,10]$, pribroji ga onome što ga je rekao A i kaže tu sumu igraču A. Tada A pribroji toj sumi neki broj iz $[1,10]$ i kaže dobivenu sumu igraču B, itd. Pobjednik je onaj igrač koji može prvi reći sumu 100. A je počeo brojem 2. Postoji li za B strategija da pobijedi?

Treći razred

1. Dokažite da za sve kutove α vrijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3\operatorname{tg}3\alpha.$$

2. Riješite jednadžbu:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

3. U ovisnosti o realnom parametru a, diskutirajte rješenja jednadžbe:

$$\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = 1$$

4. Zadana je pravilna uspravna trostrana prizma duljine brida osnovke a i duljine bočnog brida b. Odredite polumjer sfere koja sadrži vrhove donje osnovke prizme i koja dodiruje gornju osnovku.

5. Osnovka piramide je jednakostranični trokut, a bočne strane su jednakih površina. Odredite duljinu stranice osnovke ako su duljine dvaju bočnih bridova 3 i 4 cm.

Četvrti razred

1. Ispitaj je li $\operatorname{tg} 30'$ racionalan broj.

2. Zrake koje izlaze iz fokusa parabole reflektiraju se u točki te parabole simetrično s obzirom na normalu u toj točki. Dokaži da reflektirane zrake čine paralelni snop.

3. U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ riješi jednadžbu

$$(z^4 + 1 - i\sqrt{3})(z^2 - z + 1)(z^2 + \overline{z}) = 0$$

pa napiši skup S_1 svih kompleksnih rješenja te jednadžbe i skup S_2 apsolutnih vrijednosti rješenja.

4. Zadana je funkcija f formulom $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (a) Dokaži da je njezin graf hiperbola;
   (b) napiši polinom drugog stupnja P, kojem graf prolazi kroz oba fokusa spomenute hiperbole, a najveću vrijednost $\dfrac{3}{2}$ postiže u točki kojoj je apscisa između apscisa dvaju fokusa hiperbole.
   (c) dokaži da je graf tog polinoma parabola;
   (d) izračunaj udaljenosti između fokusa navedene parabole i bližeg mu fokusa spomenute hiperbole.

5. Ako u skupu rješenja nejednadžbe

$$\sqrt{\sin(\pi x) - 1} \geq -\lfloor x \rfloor \cdot 2006$$

postoji prvih 2006 (po veličini), izračunaj njihov zbroj. Ako ne postoji prvih 2006, dokaži to.
Definicija oznake[1]*:* $\lfloor x \rfloor = n$ ako je $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

[1] Za više vidi članak: *Tvrtko Tadić:* Najveće cijelo $\lfloor x \rfloor$ i njegovi prijatelji, *PlayMath* br. 4 (2004.)