$^{\pi l \alpha y}\sqrt{\mathbf{mat}\chi}$

Život između dva kvadrata (r)

Dijana Kreso

U članku *Život između dva kvadrata* objavljenom u **8.** broju *PlayMath*-a ostala sam dužna ☹ rješenje zadatka 1. načinom prikazanim u tom članku.

Ponovimo kako glasi zadatak:

ZADATAK 1. (MMO 2003.) *Odredite sve parove* (a, b) *prirodnih brojeva takve da je*

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

prirodan broj.

A sad slijedi najavljeno rješenje ☺. Evo kako sam ja riješila ovaj zadatak.

Rješenje. Uz oznaku

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} =: k$$

možemo pisati

$$a^2 - 2kb^2a + (kb^3 - k) = 0. \tag{$*$}$$

Gornju jednadžbu možemo promatrati kao kvadratnu po nepoznanici a. Njena je diskriminanta

$$\begin{aligned} D &= 4k^2b^4 - 4(kb^3 - k) \\ &= (2kb^2 - b)^2 + (4k - b^2). \end{aligned} \tag{1}$$

1° Neka je $4k - b^2 > 0$. Pokažimo da vrijedi

$$(2kb^2 - b)^2 < D < (2kb^2 - b + 2)^2.$$

Lijeva strana slijedi iz (1), a evo zašto vrijedi druga strana nejednakosti:

$$\begin{aligned} D &< (2kb^2 - b + 2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad (2kb^2 - b)^2 + (4k - b) &< (2kb^2 - b)^2 + 4(2kb^2 - b) + 4 \\ \Leftrightarrow \quad 4k - b &< 8kb^2 - 4b + 4 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &< \underbrace{(b - 2)^2}_{\geq 0} + 4k(2b^2 - 1). \end{aligned}$$

Posljednje vrijedi jer je $4k(2b^2 - 1) > 0$ zbog $k, b \in \mathbb{N}$.

Budući da D mora biti potpun kvadrat, imamo samo jednu mogućnost:

$$D = (2kb^2 - b + 1)^2,$$

tj. iz (1) dobivamo

$$\begin{aligned} 4k - b^2 &= 2(2kb^2 - b) + 1 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \underbrace{(b - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4k(b^2 - 1)}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

U ovom slučaju mora biti $b = 1$. Sada $(*)$ postaje

$$a^2 - 2ka = 0,$$

tj. kako je $a \neq 0$, slijedi $a = 2k$. Rješenje jednadžbe je $(a, b) = (2k, 1)$ za $k \in \mathbb{N}$.

<u>2° Neka je $4k - b^2 < 0$.</u> Iz (1) je očito $D < (2kb^2 - b)^2$. Slično kao u 1° vrijedi i $D > (2kb^2 - b - 2)^2$. Evo zašto:

$$\begin{array}{rcl} D & > & (2kb^2 - b - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \\ 4k - b^2 & > & -4(2kb^2 - b) + 4 \quad \Leftrightarrow \\ 4k + 8kb^2 & > & (b+2)^2 \quad \Leftrightarrow \\ 4k(1 + 2b^2) & > & (b+2)^2. \end{array}$$

A budući da je

$$4k(1 + 2b^2) \geq 4(1 + 2b^2) = b^2 + 7b^2 + 4 > b^2 + 4b + 4$$

jer su $k, b \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $k \geq 1$ i $b \geq 1 > \frac{4}{7}$. Dokaz je tu.

Budući da D mora biti potpun kvadrat, jedina mogućnost u ovom slučaju je $D = (2kb^2 - b - 1)^2$. Tj. iz (1) slijedi

$$\begin{array}{rcl} 4k - b^2 & = & -2(2kb^2 - b) + 1 \\ 4k(1 + b^2) & = & (b+1)^2. \end{array}$$

No sada zbog $k \geq 1$ i $b \geq 1$ imamo

$$4k(1 + b^2) \geq 4(1 + b^2) > (b+1)^2$$

za svaki $b \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju nema rješenja.

<u>3° Neka je $4k = b^2$.</u> Tada je $D = (2kb^2 - b)^2$. Kvadratna jednadžba $(*)$ po a ima rješenja

$$a_{1,2} = \frac{2kb^2 \pm (2kb^2 - b)}{2}.$$

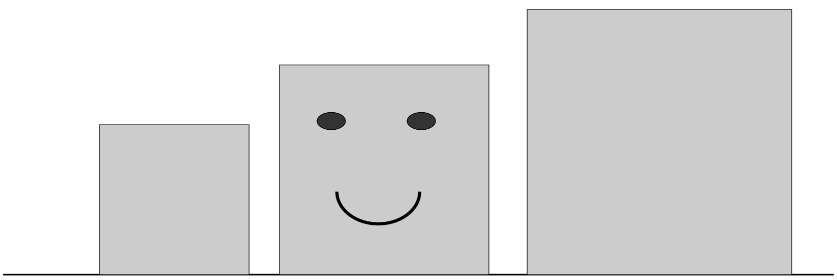
3.1° Dobivamo $a_1 = \frac{b}{2}$, što nam daje $b = 2a$. Dakle svi parovi $(a, b) = (l, 2l)$ za $l \in \mathbb{N}$ također su rješenje.

3.2° Promatrajmo $a_2 = \dfrac{4kb^2 - b}{2}$. Zbog $b^2 = 4k$, b je paran broj tj. postoji $h \in \mathbb{N}$ takav da je $b = 2h$. Vrijedi

$$a_2 = \frac{b^4 - b}{2} = 8h^4 - h.$$

Svi parovi $(a, b) = (8h^4 - h, 2h)$ za $h \in \mathbb{N}$ su rješenja.

✓



Život između dva kvadrata