$^{\pi l \alpha y}\sqrt{\mathbf{mat}\chi}$

Elegantno rješenje 6. zadatka na MMO 2006.

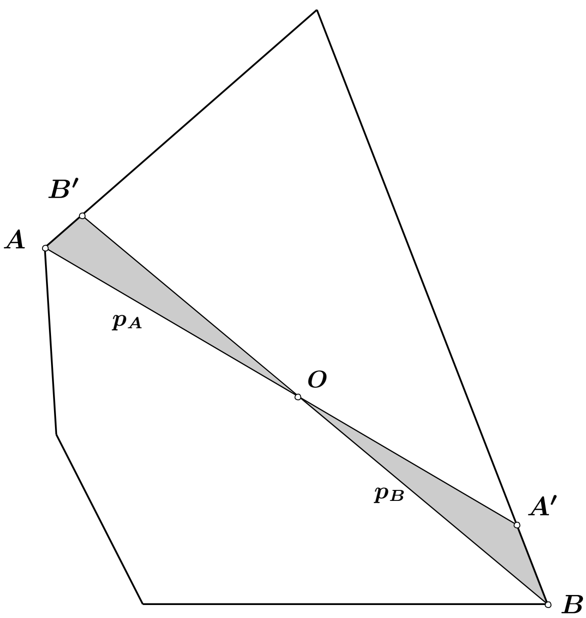
Nastavljamo sa serijom kratkih i jednostavnih rješenja. Ovo rješenje 6. zadatka s ovogodišnje MMO dao je **Fedja Nazarov**, profesor na *Michigan State University*.

Zadatak 6. Svakoj stranici b konveksnog mnogokuta $\mathcal{P}$ pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u $\mathcal{P}$. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama mnogokuta $\mathcal{P}$ veći ili jednak od dvostruke površine mnogokuta $\mathcal{P}$.

Rješenje. Kroz svaki vrh A mnogokuta možemo povući pravac p_A koji dijeli mnogokut na dva dijela jednake površine. Ako presjek mnogokuta i p_A nije vrh mnogokuta onda je to neka točka A' neke stranice mnogokuta, obilježimo tu točku također kao vrh mnogokuta. Tako dobivamo mnogokut s više vrhova u kojemu dozvoljavamo da su neki unutrašnji kutovi 180°- taj mnogokut zovemo $\mathcal{P}'$.

Primijetimo da je dovoljno dokazati tvrdnju za mnogokut $\mathcal{P}'$.

Promotrimo par vrhova A, B mnogokuta $\mathcal{P}$ takvih da su A i B', te A' i B uzastopni vrhovi mnogokuta $\mathcal{P}'$. Neka je O presjek pravaca p_A i p_B. Uniju trokuta $A'BO$ i $AB'O$ zovemo *leptir*.



Slika 1.

Primijetimo da je cijeli mnogokut prekriven leptirima.

Označimo vrhove mnogokuta $\mathcal{P}'$ s $A_1, A_2, \ldots$ Želimo pokazati da se svaka točka mnogokuta nalazi unutar nekog leptira. Neka je X proizvoljna točka mnogokuta $\mathcal{P}'$. Promotrimo pravac p_{A_1} i orijentirajmo ga - u odnosu na vektor A_1A_1' možemo reći je li točka X lijevo ili desno. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je X desno od promatranog pravca. Tada promatramo pravac p_{A_2}, pa p_{A_3},... Svaki put zabilježimo odnos pravca i točke X. Kada dođemo do pravca $p_{A_1'}$, točka X bit će lijevo u odnosu na taj pravac. To znači da u nizu promatranih pravaca postoje dva uzastopna, takva da je jednome od njih točka X zdesna, a drugome slijeva. Oni daju traženi leptir. Situacija kada je točka X s lijeve strane početnog pravca dokazuje se potpuno analogno, a ako se točka X nalazi na nekom od pravaca, tvrdnja je očita.

Zato je dovoljno dokazati da je za svaki leptir $AB'OA'B$ površina trokuta pridruženih stranicama $\overline{AB'}$ i $A'B$ dvostruko veća od površine leptira. $(*)$

Kako pravci p_A i p_B raspolavljaju mnogokut na dijelove jednakih površina, vrijedi $P(AB'O) = P(A'BO)$. Odatle slijedi[1]

$$|OA| \cdot |OB'| = |OB| \cdot |OA'|. \tag{1}$$

Zato mora vrijediti $|OB| \geq |OB'|$ ili $|OA'| \geq |OA|$. No to povlači da je

$$P(BAB') \geq 2P(OAB') \quad \text{ili} \quad P(A'AB') \geq 2P(OAB'),$$

odnosno, površina trokuta pridruženog stranici $\overline{AB'}$ barem je dvostruko veća od $P(OAB')$. Potpuno analogno slijedi tvrdnja za $\overline{A'B}$ pa zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo željenu tvrdnju $(*)$. ✓

Pripremio: Matija Bašić

[1] Zašto vidi na stranici 41.