

Odabrani zadatci

Kristina Škreb, Nikola Grubišić

Ponovo smo zajedno. ☺ Pred vama su novi, izazovni zadatci. Zadatke nam, kao što već znate, možete i sami slati. Najviše smo zainteresirani za zadatke za koje ste sami našli neka originalna rješenja ili pak za one koje ste sami smislili. Svi predlagači bit će nagrađeni. Zadatke šaljite putem e-mail-a ili na našu adresu. I na kraju, zahvaljujemo svima koji su pomogli u odabiru zadataka za ovaj broj!

G21 Na stranici \overline{BC} jednakokračnog trokuta ABC ($|AC| = |BC|$) dana je točka D ($D \neq C$) takva da vrijedi $|AD|^2 = |BD| \cdot |BC|$. Dokažite da je $|AD| = |AB|$.

G22 U kružnicu k upisan je trokut $\triangle ABC$. Neka je S središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Neka su A', B', C' sjecišta kružnice k redom s pravcima AS, BS i CS . Dokaži da vrijedi

$$P(\triangle A'B'C') \geq P(\triangle ABC).$$

A21 Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$\begin{aligned} f(x + f(x) + f(y)) &= \\ &= f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)) \end{aligned}$$

za svaka dva realna boja x, y .

A22 Neka je $P(x)$ polinom s realnim koeficijentima takav da je $P(a_1) = 0$ i $P(a_{i+1}) = P(a_i), i = 1, 2, \dots$, gdje je $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz različitih cijelih brojeva. Odredi sve mogućnosti za stupanj polinoma P .

TB20 Može li broj od 600 šestica i ponešto nula biti potpun kvadrat?

TB21 Riješi jednadžbu

$$\{x\}^2 (x + \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor^2 (x + \{x\})^2 = 4 + 2\lfloor x \rfloor \{x\}^2$$

u skupu nenegativnih realnih brojeva.

K20 Na nekom turniru, svaki igrač igra sa svakim drugim igračem odigra točno jednu igru. Nema neriješenih rezultata. Igrač A dobiva nagradu ako je za svakog drugog igrača B : A pobijedio B ili je A pobijedio nekog igrača C koji je pobijedio igrača B . Dokaži: ako je točno jedan sudionik turnira nagrađen, on je pobijedio sve ostale.

K21 Označimo s $f(n)$ broj nula u dekadskom prikazu broja $n \in \mathbb{N}$. Koliko je

$$2^{f(1)} + 2^{f(2)} + \dots + 2^{f(9999999999)}?$$

(Zadnji broj ima 10 znamenki 9.)

RJEŠENJA I UPUTE NA STRANICI 42.

