PRIMJENA DIMENZIONALNE ANALIZE NA KAMATNE STOPE

Josip STANIĆ
Konzum d.d., Zagreb

Stručni rad*
UDK: 336.781.5

Kamatni račun je područje financija koje je relativno elementarno, dobro poznato, a ipak se u praksi, pa i u teoriji, o pojedinim pitanjima pojavljuju različita shvaćanja ili interpretacije. U takvoj se situaciji pojavljuje potreba i za propitivanjem osnovnih formula kamatnog računa, a onda je dimenzionalna analiza nezaobilazno sredstvo.

Iako se literatura koja obrađuje kamatne stope i obračune kamata uglavnom eksplicitno ne izjašnjava o dimenzionalnosti kamatnih stopa, lako je uočiti da već osnovne formule koje se pritom navode često nisu dimenzionalno homogene, što znači da nisu općenito valjane. Stoga je potrebno u tom, kao uostalom i u drugim područjima ekonomije, postaviti dimenzionalno homogene formule, a to znači da ih zapravo treba (ponovno) izvesti. To je i cilj ovog rada, pri čemu je prednost dana onome što se držalo bitnim: detaljnim i potpunim izlaganjem uvelike bi se premašio prihvatljivi opseg rada.

U prvom poglavlju navode se osnovni pojmovi povezani s dimenzionalnim veličinama nužni za nastavak izlaganja. U drugom se poglavlju pokazuje, u skladu s ekonomskom teorijom i tradicijom, da je dimenzija kamatne stope recipročna vremenu. Posljedice te činjenice na formule povezane s jednostavnim ukamaćivanjem obrađuju se u trećem poglavlju. Jednostavno ukamaćivanje nije u potpunosti konzistentno s vremenskom preferencijom novca, bit ukamaćivanja je složeno ukamaćivanje, kojemu je posebna pozornost dana u četvrtom poglavlju. Iz općeg svojstva složenog ukamaćivanja izvedene su formule za dekurzivno i anticipativno ukamaćivanje, a ilustrirana je i primjena Buckinghamova teorema na kamatni račun. Definicija ekvivalentnih kamatnih stopa poslužila je za izvođenje formula pomoću kojih su razmatrani pojedini problemi kamatnog računa kao što su primjena relativne i konformne stope ili ekvivalentne dekurzivna i anticipativna stopa. Pomoću ekvivalentnih stopa konzistentno je izvedeno i trenutačno ukamaćivanje.

Ključne riječi: dimenzionalna analiza, kamatne stope, jednostavno ukamaćivanje, složeno ukamaćivanje, ekvivalentne stope

---

* *Primljeno* (Received): *31.5.2001.*
Prihvaćeno (Accepted): *26.9.2001.*

1. Najkraće o dimenzijama

Veličine koje se pojavljuju u ekonomiji općenito nisu apstraktni ili čisti brojevi (neimenovani brojevi). To su veličine koje su izražene u određenim mjernim jedinicama (imenovani brojevi), što znači da pripadaju nekoj dimenziji. Naime, svako mjerenje povezano je s određenom dimenzijom i svaka znanost u kojoj se nešto mjeri treba utvrditi koje su elementarne ili primarne dimenzije u toj znanosti.

Za potvrdu toga dobro će poslužiti primjer iz fizike u kojoj je izvorno i razvijen takav koncept dimenzije: za cijelu klasičnu mehaniku potrebne su tri primarne dimenzije - masa, duljina i vrijeme - dok su sve ostale dimenzije izvedene ili sekundarne. To znači da će i sve mjerne jedinice koje se pojavljuju u klasičnoj mehanici biti moguće izraziti pomoću mjernih jedinica za masu, duljinu i vrijeme. Tako je brzina sekundarna dimenzija (duljina/vrijeme), pa se i mjeri u jedinicama koje su izvedene iz mjernih jedinica za duljinu i vrijeme.

Primarne dimenzije, naravno, postoje i u ekonomiji, a za ovaj dio financija dovoljne su dvije:[1] novac **M** i vrijeme (vremenski intervali) **T**. Bez mogućnosti za sustavnije izlaganje u vezi s dimenzijama navedimo tek nekoliko naznaka važnih za nastavak izlaganja.[2]

1. Veličine koje pripadaju različitim dimenzijama ne mogu se zbrajati (to je ona poznata izreka o “kruškama i jabukama”).
2. *Dimenzija produkta* dviju veličina jednaka je *produktu dimenzija* tih veličina. Iz tog slijedi da su sekundarne dimenzije *produkti potencija* primarnih dimenzija.
3. Jednadžba je dimenzionalno homogena ako obje strane jednadžbe pripadaju istoj dimenziji.
4. Svaka veličina koja pripada nekoj dimenziji može se prikazati kao umnožak *mjernog broja (brojčanog iznosa)* i *mjerne jedinice*. Iz toga slijedi važno svojstvo *invarijantnosti ekonomskih veličina s obzirom na upotrebu različitih mjernih jedinica*.
5. Matematičke formulacije definicija i ekonomskih zakona koje prikazuju veze između ekonomskih veličina nazivaju se *jednadžbama među veličinama* ili *veličinskim jednadžbama.* Kako veličine ne ovise o izboru mjernih jedinica, o njima ne ovise ni veličinske jednadžbe.
6. Dimenzionalna homogenost nužan je, ali naravno ne i dovoljan, uvjet ispravnosti veličinske jednadžbe.
7. Za razliku od veličinskih, brojčane jednadžbe ovise o izboru mjernih jedinica i zato nemaju opću valjanost.

[1] Način označavanja dimenzija i pojedini termini prema Ražnjeviću (1985).

[2] O dimenzijama u fizici i tehnici i vezi s mjernim jedinicama vidjeti u Ražnjevića (1985), a o dimenzijskoj (dimenzionalnoj) analizi istoimenu natuknicu u Tehničkoj enciklopediji (Podhorsky, 1969).

O dimenzijama i dimenzionalnoj analizi u ekonomiji svakako upućujemo na temeljno djelo De Jonga (1967).[3] Prema Quadeu (1961) i De Jong prihvaća definiciju dimenzije kao *skupa*. Stoga se i govori da neka veličina *pripada* određenoj dimenziji. Važno poglavlje De Jongove knjige bavi se kamatnim stopama, a zanimljivo je da baš u tom dijelu postoje neke nepreciznosti ili čak netočnosti.

2. Dimenzija kamatne stope

Pokušajmo, polazeći od neke uobičajene definicije kamatne stope, odrediti kojoj dimenziji ona pripada. M. Car (1973:210) ovako definira kamatnu stopu: "Kamatnom stopom koju označavamo s i nazivamo onaj iznos kamata što ga donese glavnica jedinične početne vrijednosti u toku jedne vremenske jedinice (npr. početna glavnica od jednog dinara za vrijeme od godine dana)."

To ćemo prihvatiti kao radnu definiciju kamatne stope, što znači da ćemo pozornost usmjeriti na bit i uzeti u obzir da je takav način definiranja uobičajen i u financijskoj matematici i u ekonomiji. Ipak, naglašavajući aspekt dimenzionalnosti, navest ćemo da bi Ražnjević (1985:17) citiranu i sve slične odrednice smatrao *pogrešnim definicijama*: ti su izrazi pogrešni zato što se sve izvedene veličine moraju izvoditi i definirati isključivo *veličinama*, a ne *jedinicama*, i biti potpuno neovisne o izboru jedinica i sustavu kojemu jedinice pripadaju. Taj je prigovor ozbiljan i nije samo tehničke naravi: definicije pomoću jedinica shvaćene doslovno pogrešne su, a zbog nepreciznosti omogućuju različite interpretacije.

Napomenimo da se u našoj literaturi termini kamatna stopa i kamatnjak često upotrebljavaju kao sinonimi. Smatramo da je pogodniji pristup Cara (1973:210) koji razlikuje ta dva termina. "Kamatnjakom koji označavamo s p nazivamo onaj iznos kamata što ga donese početna glavnica od 100 novčanih jedinica za jednu vremensku jedinicu mjere (npr. glavnica od 100 dinara za jednu godinu). Kako 100 puta manjoj glavnici odgovara i 100 puta manji iznos kamata, to je

$$i = \frac{p}{100}$$

Pristup u kojemu kamatna stopa *nije* postotak ima tri glavne prednosti: 1. u ekonomskoj teoriji uglavnom se koristi isti pristup, 2. u praksi se primjenjuju oba pristupa, dakle i ovdje prihvaćeni pristup, i 3. u radu koji se bavi pitanjima dimenzionalnosti primjerenije je ne zahtijevati unaprijed da neki broj nužno bude postotak, promil ili sl., jer je identitet $1 = 100\%$ ionako uvijek na raspolaganju. Osim toga, neke će formule postati jednostavnije jer se u njima više neće pojavljivati broj 100.

To znači da ćemo u daljnjem tekstu pod kamatnjakom razumijevati kamatnu stopu pomnoženu sa 100. No treba imati na umu da se u citatima termin "kamatna stopa" može odnositi na ono što inače nazivamo kamatnjakom.

[3] U toj je knjizi, kao matematički dodatak, i engleski prijevod Quadea (1961) u kojemu je razvijena algebarska struktura dimenzionalne analize.

Razmotrimo, napokon, dimenziju kamatne stope. Slijedeći De Jonga (1967: 15), koji polazi od slične definicije, “iznos kamata (...) u toku jedne vremenske jedinice” jest novčani tok te stoga pripada dimenziji $\mathbf{MT^{-1}}$. “Glavnica” je novčani fond (stock) i pripada dimenziji *M*. Stoga je za kamatnu stopu *i*:

$$i \in \frac{\mathbf{MT}^{-1}}{\mathbf{M}} = \mathbf{T^{-1}}. \tag{1}$$

Iz toga slijedi da je kamatna stopa *recipročna vrijednost vremenskog intervala*. To je i uobičajeno shvaćanje u ekonomskoj teoriji. Iako se može reći da se u ekonomiji pitanju dimenzija općenito ne pridaje dovoljna pozornost, razlikovanje tokova (flows) i fondova (stocks) utjecalo je na to da se dimenzionalnost pojedinih veličina, a u tom kontekstu i kamatne stope, određuje s obzirom na vrijeme. Kao primjer takvog pristupa može poslužiti Allen (1968:3).[4]

Jedna od posljedica toga što su kamatne stope veličine koje nisu čisti brojevi jest to da i za njih mora vrijediti već spomenuta invarijantnost pri upotrebi različitih mjernih jedinica. To znači da je, prihvatimo li mjerenje vremena prema kojemu je 1 godina (G) = 4 tromjesečja (K) = 12 mjeseci (M), kamatna stopa od 1% mjesečno **jednaka** stopi od 3% tromjesečno kao i stopi od 12% godišnje. Naime, 0,01 M^{-1} = 0,03 K^{-1} = 0,12 G^{-1}.

To je analogno činjenici da je, na primjer, duljina od 5 metara jednaka duljini od 500 centimetara. Doduše, dodatni je problem to što između jedinica za mjerenje vremena ne postoje jedinstvene relacije između, primjerice, dana (D) i godine (može vrijediti 1 G = 365 D, ali i 1 G = 366 D, pa čak i 1 G = 360 D) ili dana i mjeseca, ali to se rješava nekakvom konvencijom. Primjeri takvih konvencija jesu tzv. francuska, njemačka i engleska metoda računanja broja dana unutar nekog razdoblja i u cijeloj godini.

3. Jednostavno ukamaćivanje

Promotrimo sada, u svjetlu dimenzionalnosti kamatne stope, dimenzionalnu homogenost formula u tzv. jednostavnom kamatnom računu. Često se kaže da se pri jednostavnom ukamaćivanju kamate izračunavaju na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja tijekom vremena ukamaćivanja. Tako se navodi i u Ekonomskom leksikonu (1995:365). Pri takvom izražavanju uvodi se termin “razdoblje ukamaćivanja”, za koji ćemo vidjeti da, zapravo, nije potreban. Prednost ćemo stoga dati definicijama koje naglašavaju da je iznos kamata pri jednostavnom ukamaćivanju *proporcionalan* vremenu trajanja ukamaćivanja [npr. Car (1973:211)]. Naravno, kamate su proporcionalne i glavnici, iako bi preciznije bilo reći **određenoj** vrijednosti kapitala, ovisno o metodi obračuna kamata: pri dekurzivnom ukamaćivanju to je početna vrijednost kapitala, a pri anticipativnome konačna vrijednost kapitala. Kamatna stopa tada je koeficijent proporcionalnosti između iznosa kamata i umnoška vremena trajanja ukamaćivanja i odgovarajuće vrijednosti kapitala.

[4] Napominjemo da u Allenovoj notaciji eksponenti u odnosu prema ovdje primijenjenima imaju suprotan predznak.

Promotrimo najprije dekurzivni obračun kamata. Neka je početna vrijednost kapitala C_P, dekurzivna kamatna stopa p, vrijeme trajanja ukamaćivanja T i ukupan iznos kamata za to vrijeme trajanja ukamaćivanja I. Tada je

$$I = C_P \cdot p \cdot T\,. \tag{2}$$

Ispitajmo dimenzionalnu homogenost te jednakosti. Na lijevoj je strani iznos kamata I koji pripada dimenziji **M**. Na desnoj je strani umnožak veličina

$$\begin{aligned} C_P &\in \mathbf{M} \\ p &\in \mathbf{T}^{-1} \\ T &\in \mathbf{T} \end{aligned} \tag{3}$$

što znači da desna strana pripada dimenziji $\mathbf{M} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{MT}^{0} = \mathbf{M}$. Prema tome, formula (2) dimenzionalno je homogena i čini veličinsku jednadžbu.

Rekli smo da valjanost veličinske jednadžbe ne ovisi o tome u kojim su mjernim jedinicama veličine izražene. Međutim, ako veličinsku jednadžbu želimo *neposredno* primijeniti i kao *brojčanu jednadžbu* tada moramo upotrijebiti *koherentne* mjerne jedinice. To znači da se za istu primarnu dimenziju moramo koristiti jednom mjernom jedinicom, a za sekundarne dimenzije mjernim jedinicama izvedenim iz mjernih jedinica odabranih za primarne dimenzije. Ilustrirajmo to primjerom iz jednostavnoga dekurzivnog obračuna kamata.

Neka početna vrijednost kapitala na koju se obračunavaju kamate C_P iznosi 8.000 kn, jednostavna dekurzivna kamatna stopa 3% kvartalno, a razdoblje za koje se izračunavaju kamate 7 mjeseci. Uz već korištene oznake za vremenske mjerne jedinice pretpostavljamo da vrijedi 1 G = 4 K = 12 M.

Kako je upotreba nekoherentnih jedinica neracionalna, uz znatno povećanje mogućnosti pogreške, pokažimo kako bi izgledao izračun uz koherentne jedinice. Za primarnu dimenziju novca kao mjernu jedinicu uzet ćemo kunu. Kao jedinicu za mjerenje vremena izabrat ćemo godinu, ne zato što bi to u ovom primjeru bilo računski najpogodnije, već da bi se naglasila određena mogućnost slobode u izboru mjernih jedinica.[5] Kako je 1 G = 4 K = 12 M, vrijeme trajanja ukamaćivanja bit će T = 7 M = 7/12 G. Kamatna stopa pripada dimenziji $\mathbf{T}^{-1}$ pa je treba izraziti u mjernoj jedinici G^{-1}. Stoga je

$$p = 0{,}03\ \mathrm{K}^{-1} = 0{,}03 \cdot 4\ \mathrm{G}^{-1} = 0{,}12\ \mathrm{G}^{-1}.$$

Sada možemo neposredno primijeniti formulu (2) kao formulu za brojčane vrijednosti, te je mjerni broj iznosa kamata jednak

$$8.000 \cdot 0{,}12 \cdot 7/12 = 560,$$

tj. I = 560 kn.

Računski bi jednostavnije bilo da smo kao jedinicu za mjerenje vremena izabrali neku od izvorno zadanih. Neka je to jedinica kojom je izraženo vrijeme traja-

[5] Ovdje nećemo izlagati tehniku preračunavanja veličina s jedne mjerne jedinice na drugu, iako je to dio dimenzionalne analize u širem smislu. Za kamatni račun to je prilično jednostavno.

nja ukamaćivanja, dakle mjesec. Potrebno je još kamatnu stopu preračunati na koherentnu jedinicu M^{-1}:

$$p = 0{,}03\ K^{-1} = 0{,}03 \cdot 1/3 \cdot M^{-1} = 0{,}01\ M^{-1}.$$

Mjerni broj kamata bit će

$$8.000 \cdot 0{,}01 \cdot 7 = 560,$$

što je, naravno, isti rezultat kao i prije.

Uočimo da su nam pri takvom shvaćanju formule za jednostavne dekurzivne kamate potrebne samo (i) tri navedene veličine (C_P, p i T) i (ii) poznavanje odnosa između mjernih jedinica. Nisu nam bili potrebni pojmovi "relativnog kamatnjaka", "duljine osnovnog intervala kapitalizacije", "duljine vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka" ni "broja koji pokazuje koliko se puta provodi obračun kamata u odnosu prema razdoblju nominalnog kamatnjaka". Sve su to pojmovi kojima se u sličnom primjeru koriste u radu Relić i Baričević (1994). Istina, taj rad je ponajprije namijenjen praktičarima kojima je potrebno poznavanje *tehnike izračunavanja* kamata. No problem bi se mogao postaviti i ovako: ne bi li svladavanje *tehnike rada s mjernim jedinicama* i postojanje samo onih veličina koje su i teoretski potrebne, moglo biti pogodnije u odnosu prema izvođenju sličnih računskih operacija uz redundanciju korištenih pojmova? Također se čini da ne bi trebalo inzistirati na tome da se i pri jednostavnom ukamaćivanju rabe pojmovi koji su potrebni samo pri složenom ukamaćivanju.

Osvrnimo se ukratko i na jednostavno anticipativno ukamaćivanje. Vidjeli smo da nam je pri jednostavnom dekurzivnom ukamaćivanju poznata početna vrijednost kapitala C_P, a iznos kamata proporcionalan je umnošku C_P i vremena ukamaćivanja T, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti kamatna stopa p. Buduća vrijednost kapitala C_B jednaka je zbroju početne vrijednosti kapitala i iznosa kamata:

$$C_B = C_P + I = C_P + C_P pT = C_P \cdot (1 + pT). \tag{4}$$

Pri jednostavnom anticipativnom ukamaćivanju situacija je, na određeni način, *simetrična*. Poznata nam je *konačna* vrijednost kapitala C_K. Iznos kamata proporcionalan je C_K i vremenu ukamaćivanja T, pa stoga i njihovu umnošku C_KT, a koeficijent proporcionalnosti je kamatna stopa koja se obično označava s q. Dakle, vrijedi

$$I = C_K \cdot q \cdot T. \tag{5}$$

No pritom je sadašnja vrijednost kapitala C_S jednaka *razlici* konačne vrijednosti kapitala C_K i iznosa kamata I:

$$C_S = C_K - I = C_K - C_K q\ \mathrm{T} = C_K \cdot (1 - q\ T). \tag{6}$$

Ponajprije, vidljivo je da je formula (5) dimenzionalno homogena, što se može verificirati na isti način kako je učinjeno za formulu (2). Nadalje, kako vrijednost kapitala uvijek mora biti pozitivna, iz (6) slijedi da mora biti $1 - q\ T > 0$, što znači da za zadano trajanje ukamaćivanja T jednostavna anticipativna kamatna stopa q

mora biti manja od $1/T$. Vidimo da određenje kamatne stope kao recipročne vrijednosti vremenskog intervala tada ima očiglednu interpretaciju.

Uočimo kako se u slučaju jednostavnog ukamaćivanja dimenzionalnom analizom mogu objasniti česti navodi iz literature "da se svako anticipativno ukamaćivanje može transformirati u ekvivalentno dekurzivno, promjenom kamatne stope" (Ekonomski leksikon, 1995:110), odnosno preciznije, formule koje iza tog navoda obično slijede.

Prije svega, da bi se anticipativno ukamaćivanje transformiralo u dekurzivno, potrebno je formulu (6) napisati tako da pokazuje kako konačna vrijednost kapitala C_K ovisi o sadašnjoj vrijednosti C_S, tj. u obliku

$$C_K = \frac{C_S}{1 - qT}. \tag{7}$$

Sada tražimo dekurzivnu kamatnu stopu koja bi uz početnu vrijednost kapitala C_P jednaku sadašnjoj vrijednosti C_S rezultirala budućom vrijednosti kapitala C_B jednakoj konačnoj vrijednosti C_K.

Jednostavan primjer ilustrirat će prethodno izlaganje. Neka je odobrena kratkoročna pozajmica na 135 dana uz jednostavnu anticipativnu kamatnu stopu od 20% godišnje. Konačna vrijednost pozajmice je 10.000 kn. Sadašnja vrijednost, koju dužnik dobiva na raspolaganje, jest konačna vrijednost umanjena za kamate. Pretpostavljamo da je 1 G = 365 D. Sadašnja vrijednost, prema formuli (6), glasi

$$\begin{aligned} C_S &= 10.000 \text{ kn} \cdot (1 - 0{,}2 \text{ G} \cdot 135/365 \text{ G}^{-1}) = \\ &= 10.000 \text{ kn} \cdot 0{,}926027 = 9.260{,}27 \text{ kn}. \end{aligned}$$

Uz koju će, dakle, jednostavnu dekurzivnu stopu p i početnu vrijednost od 9.260,27 kn za 135 dana buduća vrijednost kapitala iznositi 10.000 kn?

U literitaturi se, npr. u Ekonomskom leksikonu (1995:110), navodi da je dekurzivnoj kamatnoj stopi p^* ekvivalentna anticipativna kamatna stopa

$$q^* = \frac{100\,p^*}{100 + p}. \tag{8}$$

a da je anticipativnoj kamatnoj stopi q^* ekvivalentna dekurzivna stopa

$$p^* = \frac{100\,q^*}{100 - q}. \tag{9}$$

Izvornim oznakama dodane su zvjezdice zbog toga što je, prema razlikovanju koje smo već prihvatili, riječ o kamatnjacima, a ne o kamatnim stopama. U notaciji dosad korištenoj u ovom poglavlju navedenim formulama odgovarale bi formule

$$q = \frac{p}{1 + p} \quad \text{i} \quad p = \frac{q}{1 - q}. \tag{10}$$

Kako se uz formule ne navode neke posebne napomene, čitatelju se, na neki način sugerira njihova opća valjanost. Dimenzionalna analiza odmah nas upozorava da takva valjanost ne stoji. Promotrimo li nazivnike formula u (10), vidjet ćemo da se u prvome zbraja broj 1 i dekurzivna kamatna stopa p, a u drugome se od broja 1 oduzima anticipativna kamatna stopa q. Međutim, broj 1 pripada dimenziji koju označavamo s **1**, a kamatne stope dimenziji $\mathbf{T^{-1}}$, pa se u dimenzionalno homogenoj jednadžbi ne mogu zbrajati (ni oduzimati).

Dodajmo i to da dimenziji **1**, uz brojeve koji su rezultat brojenja, pripadaju i, kako ih naziva Ražnjević (1985:43-4), *veličine s produktom dimenzija jedan*, a koje se češće, iako nedovoljno precizno, nazivaju *bezdimenzionalnim produktima*. To su veličine koje nastaju kao omjer dviju veličina koje pripadaju istoj dimenziji. Eksponenti svih dimenzija postaju tada jednaki 0, pa odatle taj drugi naziv, kojim se koristi i De Jong. Dimenzionalna analiza u užem smislu zapravo proučava funkcije čiji su argumenti bezdimenzionalni produkti.

Dimenzionalno homogene formule ekvivalentnih stopa za jednostavno se ukamaćivanje mogu lako izvesti. Uzevši u obzir da treba biti $C_K = C_B$, iz (4) i (7) slijedi

$$\frac{C_S}{1-qT} = C_P \cdot (1 + pT). \tag{11}$$

Kako je $C_S = C_P$, vidi se da je redom

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + pT) \cdot (1 - qT), \\ 1 &= 1 + pT - qT - pqT^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Kanceliranje jedinice na obje strane posljednje jednakosti, te dijeljenje s T daje

$$p - q - pqT = 0, \tag{13}$$

iz čega se mogu dobiti obje relacije,

$$q = \frac{p}{1 + pT} \quad \text{i} \quad p = \frac{q}{1 - qT}. \tag{14}$$

Prednost je tih formula što iz njih neposredno uočavamo da su pri jednostavnom ukamaćivanju anticipativnoj kamatnoj stopi za *različita* vremena trajanja ukamaćivanja ekvivalentne *različite* dekurzivne kamatne stope. Tako je u promatranom primjeru, u kojemu je vrijeme ukamaćivanja bilo 135 dana, anticipativnoj kamatnoj stopi od 20% godišnje ekvivalentna dekurzivna stopa od (zaokruženo) 21,598% godišnje. No da je vrijeme ukamaćivanja bilo jedna godina, istoj bi anticipativnoj kamatnoj stopi bila ekvivalentna dekurzivna stopa od 25% godišnje.

Da su formule (14) zaista dimenzionalno homogene, nije teško verificirati. Krenimo od nazivnika. Umnošci pT i qT pripadaju dimenziji $\mathbf{T^{-1} \cdot T = T^0 = 1}$. Kako i broj 1 iz nazivnika pripada istoj dimenziji, zbrajanje i oduzimanje u nazivniku su legitimni, pa i cijeli nazivnik pripada dimenziji **1**. U brojnicima su kamatne stope, pa je dimenzija desne strane formule (14) jednaka $\mathbf{T^{-1}/\,1 = T^{-1}}$, što je upravo i dimenzija kamatnih stopa na lijevoj strani.[6]

[6] Pozorniji čitalac može iz izvoda formula (4) i (6) uočiti da je taj broj 1 također bezdimenzionalni produkt. Naime, 1 se odnosi na C_P/C_P, odnosno na C_K/C_K, što znači da pripada dimenziji $\mathbf{M/M = M^0 = 1}$.

Postavlja se pitanje što zapravo znače prvotno navedene formule (8) odnosno (9) iz Ekonomskog leksikona pri jednostavnom ukamaćivanju? To su ekvivalentni kamatnjaci, ali samo u posebnom slučaju kad je jedinica vremena takva da je *mjerni broj vremena trajanja ukamaćivanja jednak 1*. To potvrđuje da te formule nemaju opću valjanost.

4. Složeno ukamaćivanje

4.1. Općenito o složenom ukamaćivanju

Kamatne su stope usko vezane uz koncept vremenske preferencije novca. Prema tom konceptu, novac se u sadašnjosti više cijeni od nominalno jednakog iznosa u budućnosti. Kvantitativni izraz vremenske preferencije novca jest vremenska vrijednost novca, što se definira kao postupak izračunavanja vrijednosti novca u određenoj vremenskoj točki promatranja. Osnovica različitog vrednovanja novca kroz vrijeme jest oportunitetni trošak ulaganja novca koji se tehnički izražava kao kamatna stopa (Rječnik bankarstva i financija, 1993:519-520).

Nije teško vidjeti da se pri jednostavnom ukamaćivanju dosljedno ne poštuje koncept vremenske preferencije novca. Nekonzistentnosti pri jednostavnom ukamaćivanju uzrok su da se jednostavne kamate primjenjuju najčešće za kraća razdoblja i pri jednokratnom obračunu kamata. Mogli bismo tome dodati i uvjet da su *kamatne stope relativno malene*, jer se u suprotnome i za kraća razdoblja mogu pojaviti znatne razlike, kao što je dobro poznato u zemljama koje su iskusile visoku inflaciju, a s njom i visoke kamatne stope.

Muškardin (1985:79) dobro primjećuje da opravdanje jednostavnoga kamatnog računa jednostavnijom primjenom elektroničkih računala postaje beznačajno. Danas je ta činjenica još očitija. Usto, psihološki gledano, čini se da je duboko usađena predodžba o proporcionalnosti iznosa kamata s kamatnom stopom i vremenom trajanja ukamaćivanja. Ipak nije tako i ukamaćivanje je u svojoj biti složeno.

Složeni kamatni račun u Ekonomskom se leksikonu (1995:829) definira kao "postupak izračunavanja kamata na jednu ili više glavnica kojima su u prethodnim razdobljima dodane kamate. Ako se glavnica ukamaćuje tako da joj se kamate priklapaju u ekvidistantnim jedinicama vremena, tada imamo diskretno složeno ukamaćivanje, a ako se kamate priklapaju u vrlo malim jedinicama vremena, tada imamo kontinuirano ukamaćivanje. Jedna glavnica C_0, za n razdoblja uz kamatnu stopu i, narast će na ukamaćenu vrijednost C_n. Vrijednost C_n izračunava se:

a) kod diskretnog složenog ukamaćivanja po formuli

$$C_n = C_0 \ (1 + i)^{n} ;$$

b) kod kontinuiranog ukamaćivanja po formuli

$$C_n = C_0 \ \mathrm{e}^{i\,n} .\text{"}^{7}$$

[7] U tekstu se ne precizira, ali se podrazumijeva, da je e baza prirodnog logaritma (2,718281...). U natuknici *kontinuirana kapitalizacija* to je i izričito navedeno.

Pod natuknicom *diskontinuirana kapitalizacija, diskretno ukamaćivanje* (isto: 129-130) navodi se da je to “način obračuna kamata u kojem se kamata obračunava na početku ili na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja (...). Razdoblje ukamaćivanja ili kapitalizacije osnovni je vremenski interval u kojem se kamata obračunava”. Nakon toga objašnjavaju se dekurzivni i anticipativni obračun kamata i pojmovi anticipativnoga i dekurzivnoga kamatnog faktora.

Uz *kontinuiranu kapitalizaciju, neprekidnu kapitalizaciju* (isto:417) kaže se da je to “način obračuna kamata u kojem se kamata obračunava svakog trenutka i dodaje glavnici (kapitalu), tj. unutar → *vremena trajanja kapitalizacije* nema vremenskog diskontinuiteta između dva obračuna kamata i njihova pribrajanja glavnici”. Slijedi formula slična već navedenoj, s tim da se umjesto kamatne stope i navodi izraz $p/100$, pri čemu se p naziva “godišnjim kamatnjakom (godišnjom stopom prirasta)”.

U nastavku ćemo umjesto termina *kapitalizacija* rabiti termin *ukamaćivanje*. Ti se termini i u Ekonomskom leksikonu i u drugoj literaturi koriste kao sinonimi. No što je *ukamaćivanje*? Muškardin (1985:75) navodi da je to glavni pojam financijske matematike i “varijacija kapitala tijekom vremena”. Moglo bi se reći da su prethodno iznesena shvaćanja diskretnoga i kontinuiranog ukamaćivanja sukladna onome što Šego (1991:6-16) naziva *klasičnim pristupom* financijskoj matematici. No Muškardin (1985) u svom istoimenom radu i Šego (1991:19-29), koji također polazi od tog rada, izlažu i tzv. *suvremeni pristup* financijskoj matematici.

Kako je ukamaćivanje varijacija kapitala tijekom vremena, vrijednost kapitala je funkcija vremenskog trenutka t. Ako je ta funkcija definirana u svakoj točki vremenskog kontinuuma, riječ je o kontinuiranome, a ako je definirana samo za neke točke, to je diskretno ukamaćivanje.

Sada se u kontinuiranom ukamaćivanju za složeno ukamaćivanje navodi formula

$$C(t) = C(0)\left(1 + \frac{i}{100}\right), \tag{15}$$

koja se odnosi na dekurzivni obračun kamata (Šego,1991:19f, 22-23). Umjesto izlaganja drugih važnih elemenata suvremenog pristupa financijskoj matematici naglasimo u ovom kontekstu najvažniju činjenicu: *diskretno i kontinuirano ukamaćivanje određeni su prema tome koje vrijednosti može poprimiti varijabla vrijeme, a ne prema tome koji se način obračuna kamata primjenjuje.* Takav je pristup u potpunosti prihvaćen i u ovom radu. Tako će izraz *kontinuirano anticipativno ukamaćivanje* označivati kontinuirani skup vrijednosti varijable vrijeme i anticipativni obračun kamata.

Već kratki pogled na formule iz ovog odjeljka pokazuje da nijedna od njih *nije* dimenzionalno homogena ako pod kamatnom stopom razumijemo dimenzionalnu veličinu. Umjesto analiziranja različitih izvoda, pokušajmo “izvesti” formule za složeno ukamaćivanje, ali tako da budu dimenzionalno homogene. Prije toga verificirajmo spomenute dimenzionalne nehomogenosti.

Formula

$$C_n = C_0 \ (1 + i)^{\, n} \tag{16}$$

nije dimenzionalno homogena jer se na desnoj strani broj 1 zbraja s kamatnom stopom *i*. Vidjeli smo već da broj 1 pripada dimenziji **1**, a kamatna stopa *i* dimenziji $\mathbf{T^{-1}}$, pa se ne mogu zbrajati.

Formula navedena za kontinuirano ukamaćivanje

$$C_n = C_0 \ \mathrm{e}^{\, i\, n} \tag{17}$$

u eksponentu potencije kojemu je baza e ima veličinu *in*. Pritom je *i*, kao i prije, kamatna stopa, a *n broj* razdoblja ukamaćivanja. Iz toga bi proizlazilo da je *n* čist broj, te pripada dimenziji **1**. No tada produkt *in* pripada dimenziji $\mathbf{T^{-1} \cdot 1 = T^{-1}}$. Međutim, u dimenzionalnoj se analizi pokazuje da *argumenti transcedentnih funkcija mogu biti samo veličine koje pripadaju dimenziji* **1**. Samo je tada ispunjen zahtjev tzv. *apsolutnog značenja relativnih veličina*, koji kaže da se omjer dviju veličina koje pripadaju istoj dimenziji ne mijenja s promjenom mjerne jedinice.

Dimenzionalno homogena nije ni formula (15), koju ćemo radi jednostavnijeg zapisa napisati pomoću kamatne stope, a ne pomoću kamatnjaka:

$$C(t) = C(0)\ (1 + i)^{\mathrm{t}}\,. \tag{18}$$

Nelegitimnost takve notacije, kako De Jong (1967:82) pri razmatranju praktično iste formule navodi, posljedica je dvaju razloga. Eksponent *t* označava vremenski interval između trenutka *t* i trenutka $t_0 = 0$, pa pripada dimenziji **T**, što, vidjeli smo, nije prihvatljivo. Usto se u okrugloj zagradi zbrajaju veličine različitih dimenzija.

Formula (18) posebice je važna jer se pojavljuje i u radu Muškardina (1985: 77),[8] **jednome od malobrojnih radova iz financijske matematike u kojemu se eksplicitno spominju dimenzije**. To je zanimljivija njezina dimenzionalna nehomogenost.

Muškardin za kapital kao funkciju vremena navodi model *prirodnog rasta* u kojemu je *intenzitet rasta* λ "bilo koji realni broj":

$$f\,(t) = f\,(0)\ \mathrm{e}^{\,\lambda\, t} \qquad \text{[Muškardin (7)]}$$

i nastavlja: "Budući da je dimenzija parametra λ recipročna vremenu (jer vrijednost $\mathrm{e}^{\lambda t}$ u (7) mora biti bezdimenzionalna), jasno je da će broj kojim se on iskazuje zavisiti od izbora mjerne jedinice za vrijeme."

To je potpuno točno, ali zbog istog razloga u (18) ne može u eksponentu biti samo *t*. Muškardin se ne osvrće ni na činjenicu da ne mogu istodobno biti legitimni zbrojevi $1+i$ iz formule (18) i $1+ti$ iz formule koju navodi za jednostavno ukamaćivanje: iz prvoga bi proizlazilo da je kamatna stopa *i* čist broj, a iz drugoga da je, kao i λ, recipročna vremenu. To je, zapravo, ilustracija orijentiranosti financijske matematike na *brojčane*, a ne na *veličinske* jednadžbe.

[8] U svom radu umjesto simbola *C* Muškardin se koristi simbolom *f*.

U citiranim natuknicama iz Ekonomskog leksikona vidjeli smo da se uz diskretno ukamaćivanje spominje razdoblje ukamaćivanja kao "osnovni vremenski interval u kojem se kamata obračunava" (1995:129), a uz složeni kamatni račun ekvidistantne vremenske jedinice u kojima se priklapaju kamate (1995:829). Suprotno tome, u formulama navedenim u ovom odjeljku eksplicitno nema takve veličine. To sugerira mogući izvor njihove dimenzionalne neusklađenosti.

Priroda ovog rada ne omogućuje detaljnije zasnivanje i obrazlaganje izvoda formula složenog ukamaćivanja. Bitna je postavka da pri složenom ukamaćivanju relativna promjena kapitala, *ceteris paribus,* ovisi *samo o vremenu trajanja ukamaćivanja*. Pritom se izraz *ceteris paribus* odnosi na kamatnu stopu i način obračuna kamata.

Načelno, nema ograničenja s obzirom na to kakvo bi bilo vrijeme trajanja ukamaćivanja. Nekada se, naime, primjenjivalo i tzv. mješovito ukamaćivanje, u kojemu bi se nakon složenog ukamaćivanja za cijeli broj određenih razdoblja primijenilo jednostavno ukamaćivanje na preostalo, nepotpuno razdoblje. No tada se pojavljuju prije spomenute nekonzistentnosti. Vrijeme trajanja ukamaćivanja također može biti i negativno, što znači da se zapravo obavlja diskontiranje i vrijednost kapitala izračunava u trenutku koji je raniji u odnosu prema aktualnome.

Da bismo operacionalizirali navedenu postavku, uvest ćemo novi pojam koji ćemo nazvati *koeficijentom promjene kapitala V*, što označava omjer stanja kapitala u krajnjim točkama nekog vremenskog razdoblja ("buduće"[9] i sadašnje vrijednosti). Sada proizlazi da će koeficijent promjene kapitala V za vrijeme trajanja ukamaćivanja $T_1 + T_2$ biti jednak *umnošku* koeficijenata promjena za razdoblja T_1 i T_2, odnosno

$$V(T_1 + T_2) = \mathrm{V}(T_1) \cdot \mathrm{V}(T_2)\,. \tag{19}$$

To je jednostavno vidjeti ako sa C_0, C_1 i C_2 redom označimo vrijednosti kapitala u trenucima t_0, t_1 i t_2, pri čemu je $T_1 = t_1 - t_0$ i $T_2 = t_2 - t_1$. Relacija (19) proizlazi iz očite jednakosti

$$\frac{C_2}{C_0} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_1}{C_0}\,. \tag{20}$$

Kako je "prirodno" zahtijevati da malim promjenama vremena trajanja ukamaćivanja odgovaraju male promjene stanja kapitala, što u tehničkom smislu znači neprekidnost funkcije V u odnosu prema T, iz (19) proizlazi da je V eksponencijalna funkcija od T, ili, preciznije, možemo reći, iako to nećemo ovdje dokazivati, da u složenom ukamaćivanju za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja T i svaki realni broj λ vrijedi

$$V(\lambda T) = [V(T)]^{\lambda}\,. \tag{21}$$

[9] Riječ "buduće" je u navodnicima jer smo uključili i kretanje unatrag po vremenskoj osi.

Povezanost eksponencijalne funkcije i složenog ukamaćivanja nije novost. Iako se u literaturi susreće pristup prema kojemu bi eksponencijalna funkcija bila rezultat zahtjeva da financijska ekvivalencija kapitala bude tranzitivna relacija (Car, 1973:415), pozornije iščitavanje pokazuje da se pod tranzitivnošću zapravo razumijeva relacija (19).

4.2. Složeno dekurzivno ukamaćivanje

Dosad smo razmatrali složeno ukamaćivanje općenito. Sada ćemo se usredotočiti na složeno *dekurzivno* ukamaćivanje. Prema Ekonomskom leksikonu (1995: 110) "pri dekurzivnom načinu obračuna kamata (...) kamate se obračunavaju na kraju svakog razdoblja, od početne vrijednosti". Prisjetit ćemo se i natuknice o *složenom kamatnom računu* u kojoj se navodi da se kamate izračunavaju na glavnicu kojoj su prethodnim razdobljima dodane kamate. Također smo za *diskontinuiranu kapitalizaciju* uočili da je razdoblje ukamaćivanja osnovni vremenski interval u kojemu se obračunava kamata.

Iz navedenoga proizlazi da je iznos *složenih* dekurzivnih kamata za neko *razdoblje ukamaćivanja* jednak iznosu *jednostavnih* dekurzivnih kamata izračunanih primjenom zadane kamatne stope na vrijednost kapitala na početku *tog* razdoblja ukamaćivanja.[10] Kad je riječ o jednostavnom ukamaćivanju vidjeli smo da je iznos kamata proporcionalan i vremenu trajanja ukamaćivanja. Očito u tom slučaju vrijeme ukamaćivanja može biti jedino spomenuto *razdoblje ukamaćivanja*. Mi ćemo to razdoblje nazvati *osnovnim razdobljem na koje se odnosi kamatna stopa* i označiti ga s *d*.

To znači da će pri složenom dekurzivnom ukamaćivanja za vrijeme trajanja ukamaćivanja *d* vrijediti

$$V(d) = 1+pd. \tag{22}$$

Iz relacije (21) proizlazi da će za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja *T* biti

$$V(T) = V\left(d \cdot \frac{T}{d}\right) = [V(d)]^{T/d}. \tag{23}$$

Kako je koeficijent promjene V omjer buduće vrijednosti kapitala C_B i sadašnje vrijednosti C_S, možemo napisati formulu za buduću vrijednost kapitala pri složenom dekurzivnom ukamaćivanju i usporediti je s već citiranim, kao i drugim formulama:

$$C_B = C_S \cdot (1 + pd)^{T/d}. \tag{24}$$

Prije svega uočimo da je ta formula dimenzionalno homogena. U zagradi na desnoj strani nalazi se umnožak $p \cdot d$. Dimenzija kamatne stope p je $\mathbf{T^{-1}}$, a osnovno razdoblje d kao vremenski interval pripada dimenziji $\mathbf{T}$. Stoga njihov umnožak pripada dimenziji $\mathbf{T^{-1} \cdot T = T^0 = 1}$, pa je tada zbrajanje s brojem 1 potpuno legitim-

[10] Tako se izračun složenih kamata često i ilustrira. Vidjeti npr. Car (1973:413).

no. Nadalje, eksponent T/d, omjer dvaju vremenskih intervala, također pripada dimenziji **1**, kao što smo i vidjeli da za eksponent treba biti. Na taj način dimenzija desne strane je $\mathbf{M} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{M}$, što je očito i dimenzija lijeve strane.

Za dimenzionalnu homogenost formule (24) bitno je postojanje veličine d. Ta bi se veličina mogla zvati *osnovnim razdobljem ukamaćivanja* u smislu da je upravo za to razdoblje relativna promjena kapitala jednaka umnošku kamatne stope i vremena trajanja ukamaćivanja. Nasuprot tome, pročitali smo da se osnovnim razdobljem ukamaćivanja naziva "osnovno razdoblje u kojem se kamata obračunava". Stoga bi za d iz formule (24) prednost ipak imao termin "osnovno razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa", jer razdoblje *obračuna* kamata, što ćemo kasnije vidjeti, može biti različito od d. Formula (24) može se pisati s istim značenjem u različitim notacijama. U biti, ona vrijedi i za diskretni i za kontinuirani slučaj. Uvrstimo li da je $T = t_2 - t_1$, interpretacija za diskretnu varijantu je očita. U kontinuiranom slučaju uobičajeno je, ali nije nužno, "sadašnji trenutak" smatrali ishodištem pa dobivamo

$$C(t) = C(0) \cdot (1 + pd)^{t/d} \,. \tag{25}$$

U formule (24) i (25) mogu se, umjesto izvornih veličina, uvesti bezdimenzionalni produkti, ali je uvijek potrebno imati na umu što oni zapravo znače. Tako ćemo, zamijenimo li omjer T/d oznakom ν, dobiti

$$C_B = C_S \cdot (1 + pd)^{\nu}. \tag{26}$$

Primijetimo da je pritom, u skladu s prethodnim razmatranjima, ν realan (a ne nužno prirodan) broj.[11] Ako pak uvedemo veličinu $\pi = p{\cdot}d$, koja je također dimenzije **1**,[12] možemo pisati

$$C_B = C_S \cdot (1 + \pi)^{T/d}. \tag{27}$$

Ponovno naglasimo da iz dimenzionalne homogenosti formula (24) i (25) [a tako i iz (26) i (27)] *proizlazi njihova neovisnost o mjernim jedinicama*. Naravno, za neposredno korištenje kao brojčanih jednadžbi potrebno je da mjerne jedinice budu koherentne. Slične formule, pak, koje smo dosad citirali iz literature, valjane su, ali ne općenito, nego uz određene uvjete.

Spomenuli smo da se svaka veličina može prikazati kao umnožak mjernog broja i mjerne jedinice. Primjenimo li notaciju Ražnjevića (1985) koji *mjerni broj* veličine X označava sa $\{X\}$, a *mjernu jedinicu* sa $[X]$, veličinska jednadžba (24) može se pisati u obliku

$$\{C_B\}[C_B] = \{C_S\}[C_S] \cdot (1 + \{p\}[p] \cdot \{d\}[d])^{\frac{\{T\}[T]}{\{d\}[d]}}. \tag{28}$$

Ako odabranu jedinicu za novac označimo s $[m]$ tada koherentnost znači da je $[C_B] = [C_S] = [m]$. Označimo li pak odabranu jedinicu za vrijeme s $[t]$, moramo je

[11] U literaturi je drukčije. Katkad se u sličnim formulama pojavljuje eksponent n i one se dokazuju matematičkom indukcijom, a zatim se u zadacima primjenjuju, bez posebnih napomena, i na realne eksponente.

[12] Taj π ne treba ni na koji način miješati s brojem $\pi = 3{,}14159...$

koristiti kao mjernu jedinicu i za T i za d, tj. $[T] = [d] = [t]$. Štoviše, kako je dimenzija kamatne stope $\mathbf{T}^{-1}$, mjerna jedinica kamatne stope mora biti $[t]^{-1}$. Uvrstimo li te mjerne jedinice u (28), dobit ćemo

$$\{C_B\}[m] = \{C_S\}[m] \cdot (1 + \{p\}[t]^{-1} \cdot \{d\}[t])^{\frac{\{T\}[t]}{\{d\}[t]}}. \qquad (29)$$

Kraćenja i kanceliranja vode nas do *brojčane* jednadžbe u potpunosti slične polaznoj veličinskoj jednadžbi

$$\{C_B\} = \{C_S\} \cdot (1 + \{p\} \cdot \{\mathrm{d}\})^{\frac{\{T\}}{\{d\}}}. \qquad (30)$$

Ako je jedinica za mjerenje vremena izabrana tako da je jednaka osnovnom razdoblju d, mjerni broj $\{d\}$ jednak je 1 i prethodna brojčana jednadžba postaje

$$\{C_B\} = \{C_S\} \cdot (1 + \{p\})^{\{T\}}. \qquad (31)$$

Kako se u financijskoj matematici često izričito ne spominje nikakvo osnovno razdoblje već "jedinični vremenski interval" (Muškardin, 1985:76), ili se čak 1 godina uzima kao fiksna, zadana veličina, to objašnjava sličnost brojčane jednadžbe (31) s formulama iz financijske matematike, kao što je, na primjer, već citirana (18):

$$C(t) = C(0)\ (1 + i)^t. \qquad (32)$$

Čak i kad se, kao u Ekonomskom leksikonu (1995:129), navodi "osnovni vremenski interval u kojem se kamata obračunava", kaže se da to može biti bilo koja vremenska *jedinica*. Čini se da je određena konfuzija između mjernih jedinica vremena i ekonomske veličine d, ili njoj odgovarajuće veličine, duboko ukorijenjena, i to ne samo u financijskoj matematici. Takav primjer nalazimo i u samog De Jonga, koji je izveo dimenzionalno homogenu formulu za složeno (dekurzivno) ukamaćivanje.

Prije De Jongove formule prokomentirajmo formulu (26). U njoj se pojavljuje bezdimenzionalni produkt ν, pa bi joj uz koherentne jedinice odgovarala brojčana jednadžba

$$\{C_j\} = \{C_i\} \cdot (1 + \{p\} \cdot \{d\})^{\nu}. \qquad (33)$$

Pritom se mjerni broj osnovnog razdoblja d pojavljuje eksplicitno samo jedanput, a brojčana jednadžba za $\{d\} = 1$ odgovara prije citiranoj formuli (16):

$$C_n = C_0\ (1 + i)^n. \qquad (34)$$

Zbunjuje, međutim, što se, iako se n definira kao *broj* razdoblja, u primjenama potom izražava u mjernim jedinicama za vrijeme, dakle navodi se kao vremenski interval.[13] No iako uz $\{d\} = 1$ vrijedi $\nu = \{T\}$, uvijek je $\nu \neq T$ jer pripadaju različitim dimenzijama.

De Jongova (1961:80-82) formula za složeno diskontinuirano ukamaćivanje izvedena je upravo s ciljem dobivanja dimenzionalno homogene formule. Oznake i termini kojima se koristi De Jong, među ostalim, jesu:

[13] Vidjeti npr. Šego (1991:6-9), koji prikazuje primjere unutar *klasičnog pristupa*.

K_a - kapital

r - kamatna stopa

t - vremenski interval

t_0 - vremenska jedinica (pretpostavljeno mala).

Tijekom izvođenja De Jong uvodi bezdimenzionalni produkt

$$\rho = r\,t_0 \qquad \text{[De Jong (2.2.9) dio]}$$

i dolazi do formule

$$K_{a(t)} = K_{a0} \cdot (1 + \rho)^{t/t_0} \qquad \text{[De Jong (2.2.10)]}$$

De Jongova jednadžba *formalno* je jednaka formuli (27) ako se uzme da je $t_0 = d$.[14] Međutim, *sadržajno* postoje tri razlike, od kojih su prve dvije bitne:

(i) De Jong inzistira na tome da t_0 mora biti *mali* interval vremena[15], a veličina osnovnog razdoblja d načelno nije ograničena i kreće se između 0 i $+\infty$.

(ii) Iako De Jong t_0 uzima kao interval između dva plaćanja kamata, kod njega je to istodobno, i mjerna jedinica za vrijeme. Formule (24) - (27) potpuno su neovisne o mjernim jedinicama i u njima nema posebnog razloga da mjerna jedinica za vrijeme bude osnovno razdoblje d.

(iii) Omjer t/t_0 *prirodan* je broj, dok je u formulama (24) - (27) $T/d = \nu$ bilo koji *realan* broj.

Nepotrebna ograničenja koja je formuli [De Jong (2.2.10)] nametnuo sam tvorac, ne umanjuju, međutim, **iznimno značenje koje proizlazi iz njezine dimenzionalne homogenosti**. Da je t_0 mali vremenski interval, a t/t_0 prirodan broj proizlazilo bi iz De Jongova neobičnog izvoda koji ovdje ne možemo analizirati.

Teže je reći zbog čega je De Jong smatrao t_0 i mjernom jedinicom za vrijeme trajanja ukamaćivanja t. Možda je tome razlog što je to inače vrlo čest slučaj u primjenama formula za složeno ukamaćivanje. Na sličan se način u Ekonomskom leksikonu za diskontinuirano ukamaćivanje kaže da je "pri izračunavanju kamata potrebno vrijeme trajanja kapitalizacije izraziti u jedinicama razdoblja kapitalizacije".

Dakle, ako je tom tako, tada je t/t_0 i numerička vrijednost od t i upravo to De Jong vidi kao mogući uzrok pisanja svoje formule (2.2.10) u obliku:

$$K_{a(t)} = K_{a0} \cdot (1 + \rho)^t \,. \qquad \text{[De Jong (2.2.10 bis)]}$$

Kako je sada numerička vrijednost od t_0 jednaka 1, "*numerički* će vrijediti da je $\rho = r$. To je razlog da se, *u praksi*, ρ iz jednadžbe (2.2.10) često naziva 'složena kamatna stopa' i jednadžba (2.2.10 bis) tada se piše kao

---

[14] U nastavku, pri raspravi o nominalnoj i realnoj kamatnoj stopi, De Jong (1967:91) navodi i formulu analognu formuli (25).

[15] Što je to *malo,* očito je relativno: za primjer De Jong uzima jednu godinu.

$$K_{a(t)} = K_{a0} \cdot (1 + r)^t. \qquad (2.2.10 \text{ ter})$$

Međutim, notacija (2.2.10 ter) *nelegitimna* je iz dva razloga. Prvo, iz jednadžbe (2.2.9) proizlazi da je kamatna stopa u pravom smislu r, ne ρ, i ta dva entiteta ne pripadaju istoj dimenziji. Zbog toga je nužno sačuvati poseban naziv za bezdimenzionalni entitet ρ: trebao bi biti nazvan 'diskontnom stopom'" (De Jong, 1967: 82).[16]

Čini se da je ne samo *u praksi*, već i u financijskoj matematici česta upravo takva situacija: pod nazivom kamatna stopa zapravo se misli na poseban *bezdimenzionalni* produkt. To je pitanje koje zavređuje posebnu pozornost, jer time dolazi do razilaženja s ekonomskom *teorijom* u kojoj je dimenzija kamatne stope redovito $\mathbf{T}^{-1}$.

Ako se s De Jongovih vratimo na oznake kojima smo se prije koristili, tada (24) možemo pomoću dva bezdimenzionalna produkta pisati kao

$$C_B = C_S \cdot (1 + \pi)^{\nu}. \qquad (35)$$

Ta je formula očito dimenzionalno homogena i napisana je bez eksplicitnog korištenja osnovnog razdoblja d. Je li to prednost ili nedostatak?

Prije pokušaja odgovora na to pitanje najprije valja navesti terminološku napomenu. Dok se za ν možemo koristiti nazivom broj osnovnih razdoblja, bezdimenzionalni produkt π zaista zaslužuje poseban naziv. No De Jongov prijedlog nije najsretniji jer se termin "diskontna stopa" često upotrebljava ali uglavnom u drugom značenju. Stoga ćemo u nastavku π zvati "kamatnim koeficijentom".[17]

Prije svega, iz formule (24) ili (25) točno se vidi o kojim veličinama i na koji način ovisi buduća vrijednost kapitala. To su sadašnja vrijednost kapitala, kamatna stopa, osnovno razdoblje i vrijeme trajanja ukamaćivanja. Ako su oni zadani, buduća vrijednost kapitala **jednoznačno** je određena.

Usto, formula (35) pogodna je za primjenu jer se osim za kapital u njoj pojavljuju samo brojčane veličine. No uvijek treba biti svjestan da je u njezinoj "pozadini" formula (24). Naime, bez veličine d ne vidi se pravo značenje π, a ne može se odrediti ni ν. Stoga se, iako se u primjenama d često ne navodi izričito, pojavljuje posredno, kao atribut. Takvi su npr. izrazi "godišnja kamatna stopa 5" ili "godišnji kamatnjak 5" ili "godišnja kamatna stopa 5%". (Taj bi primjer, uz predloženi termin, glasio "godišnji kamatni koeficijent 5%" ili "godišnji kamatni koeficijent 0,05".) Takav način izražavanja pokazuje koliki je d i, kako se najčešće zadaje vrijeme ukamaćivanja T a ne neposredno broj razdoblja, omogućuje da uočimo ili izračunamo ν.

Bez obzira na *teoretski* dvojbenu uporabu termina "kamatna stopa" u prethodnim izrazima, takav način navođenja osnovnog razdoblja nije dokraja ni *praktično* prihvatljiv. Naime, kako se rabi izraz "kamatna stopa", nije u potpunosti izbjegnuta mogućnost da se pod pojmom "godišnji" misli zapravo na jedinicu u kojoj je izražena kamatna stopa, a ne nužno i na osnovno razdoblje na koje se kamatna stopa odnosi.

---

[16] Svi su citati De Jonga na hrvatskome autorov prijevod.

[17] Ni taj termin nije najprecizniji: ne treba ga miješati s kamatnim koeficijentom potrošačkih kredita.

Ta je dvojba još veća ako se navede samo kamatna stopa (npr. "kamatna stopa od 5% godišnje"). Bez dopunskih informacija ne preostaje drugo nego o tome koliki je d zaključivati iz mjerne jedinice korištene za p. Osim toga, u praksi bi prilično nezgrapno djelovalo teoretski preciznije izražavanje poput "godišnja kamatna stopa od 5% godišnje". Uzgred napominjemo da je, u smislu dosadašnjeg izlaganja, taj izraz ekvivalentan izrazu "godišnja kamatna stopa od 2,5% polugodišnje". Naglasimo, međutim, da se u stranoj literaturi susreću izrazi poput "kamatna stopa od 5% godišnje, ukamaćivanje godišnje".[18]

U svakom slučaju pokazalo se da je način izražavanja kamatnih stopa i osnovnog razdoblja problematičan ne samo sa stajališta dimenzionalne analize nego, mnogo više, zbog različitih tumačenja pri primjeni u praksi. No problem je širi od ovdje iznesenoga i još ćemo ga se dotaknuti.

Upozorimo i na to koje su sličnosti, a koje razlike između kamatnog koeficijenta π i mjernog broja kamatne stope $\{p\}$. Prvo, i jedno i drugo veličine su dimenzije **1**, dakle brojevi. Drugo, kada je d mjerna jedinica za vrijeme, onda je $\{p\} = \pi$. Razlika je u tome što će se, kad se promijeni mjerna jedinica za vrijeme promjeniti i mjerni broj kamatne stope, dok vrijednost kamatnog koeficijenta kao bezdimenzionalnog produkta ne ovisi o mjernim jedinicama. U stvarnosti je obično teško zaključiti je li u nekoj formuli riječ o kamatnom koeficijentu π ili o mjernom broju kamatne stope izražene pomoću mjerne jedinice za vrijeme jednako osnovnom razdoblju.

Dok je, dakle, pri *složenom* dekurzivnom ukamaćivanju upotreba bezdimenzionalnih produkata π i v potpuno legitimna, u *jednostavnom* dekurzivnom ukamaćivanju ona se ne može opravdati. Naime, uvijek treba imati na umu da su bezdimenzionalni produkti izvedene veličine i da relevantnost njihove primjene ovisi o relevantnosti primjene izvornih veličina. Reći da je iznos kamata pri jednostavnom dekurzivnom ukamaćivanju jednak

$$I = C_P \cdot \pi \cdot v \tag{36}$$

ne bi bilo primjereno jer to zapravo znači

$$I = C_P\,(p \cdot d)\,(T\,/\,d), \tag{37}$$

dakle, izraz u kojemu se druge veličine jedanput množe i jedanput dijele veličinom d, pa ona iščezava i dobivamo već poznato

$$I = C_P \cdot p \cdot T. \tag{38}$$

Prema tome, sada se umjesto *dva* bezdimenzionalna produkta π i v pojavljuje *jedan*: pT.

Ponovno vidimo da osnovnom razdoblju d u jednostavnom ukamaćivanju nema mjesta, jer što god mi uzeli za d, rezultat ne ovisi o tome. Primjena bezdimenzionalnih produkata π i v mogla bi se objasniti pogrešnom težnjom da se jednostav-

[18] Posljednja formulacija sugerira alternativnu mogućnost da se u formulama za složeno dekurzivno ukamaćivanje umjesto veličine d rabi njezina recipročna vrijednost koja bi bila dimenzije $\mathbf{T}^{-1}$ i mogla bi se nazvati *frekvencijom ukamaćivanja*.

no i složeno ukamaćivanje opisuju istim veličinama, a sve kako bi se dobile formule koje ne sadrže dimenzionalne veličine već čiste brojeve.[19] No bez obzira na moguću jednakost brojčanog iznosa, uvijek je $\pi \neq p$ i $v \neq T$.

Na kraju ovog odijeljka napomenimo da smo formulu (24) mogli napisati pomoću *tri* bezdimenzionalna produkta. Označimo li s κ omjer C_B/C_s, možemo pisati

$$\kappa = (1 + \pi)^{v}. \tag{39}$$

Primjetimo da I. financijske tablice nisu zapravo ništa drugo već tablice koeficijenta promjene kapitala κ za odabrane vrijednosti kamatnog koeficijenta π i za cjelobrojne vrijednosti v od 1 do 50.

Formulom (39) možemo na formuli (24) ilustrirati tzv. *Buckhinghamov teorem*[20], važan dio dimenzionalne analize koji ćemo "prepričati" prema De Jongu (1967:52-53). U njemu se izriče da se *svaka dimenzionalno homogena jednadžba može napisati kao funkcionalna relacija između potpunog skupa međusobno neovisnih bezdimenzionalnih produkata*. Još više, *dimenzionalna homogenost* pritom je ovdje i nužan i dovoljan uvjet.

Međusobna nezavisnost znači da se nijedan bezdimenzionalni produkt (u našem primjeru κ, π ili v) *ne može* izraziti kao produkt potencija ostalih produkata. Za to je dovoljno, ali nije nužno, da svaki od tih bezdimenzionalnih produkata sadrži barem jednu veličinu koju ne sadrže ostali.

Potpunost pak znači da se bilo koji drugi bezdimenzionalni produkt veličina C_B, C_S, p, d i T može izraziti kao produkt potencija bezdimenzionalnih produkata κ, π i v. Na primjer, već smo vidjeli da se bezdimenzionalni produkt pT može iskazati kao πv.

Teorem govori i koliko elemenata sadrži potpuni skup međusobno neovisnih bezdimenzionalnih produkata (De Jong, 1967:104). U promatranom primjeru on se ne mora sastojati baš od κ, π i v, iako su oni za to najpogodniji. No za veličine C_B, C_S, p, d i T potpuni skup međusobno neovisnih produkata uvijek sadrži *tri* elementa. Tolika je, naime, razlika između broja veličina[21] (5) i ranga tzv. *dimenzionalne matrice* (2), čiji su elementi eksponenti potencija primarnih dimenzija kojima pripadaju navedene veličine.

	C_B	C_S	p	d	T
M	1	1	0	0	0
T	0	0	-1	1	1

[19] Pritom su u formulama za jednostavno ukamaćivanje ti čisti brojevi zapravo mjerni brojevi, a u formulama za složeno ukamaćivanje mogu biti i bezdimenzionalni produkti. No primjena istih oznaka, proizašla iz već spomenutog miješanja mjernih jedinica za vrijeme i osnovnog razdoblja, zamagljuju tu razliku.

[20] U literaturi se pojavljuje i pod nazivom *pi- teorem*.

[21] U obzir uzimamo sve veličine koje pripadaju nekoj dimenziji $\neq \mathbf{1}$, neovisno o tome jesu li to varijable ili dimenzionalne konstante.

Primjena Buckinghamova teorema obično je "u suprotnom smjeru" od ovdje ilustrirane. Mi smo dimenzionalno homogenu formulu (24) preveli u formulu (39) u kojoj se pojavljuju samo bezdimenzionalni produkti. Dalekosežnost Buckinghamova teorema, međutim, pokazuje sljedeća činjenica: pretpostavimo da na osnovi nekog teoretskog znanja smatramo da je pri složenom dekurzivnom ukamaćivanju buduća vrijednost kapitala C_B funkcija sadašnje vrijednosti kapitala C_S, kamatne stope p, osnovnog razdoblja d i vremena ukamaćivanja T, ali ne znamo koja je to funkcija. Tada nam teorem kazuje da postoji potpun skup od tri međusobno neovisna bezdimenzionalna produkta, a rješavanjem homogenog sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz navedene matrice možemo i naći neka tri takva bezdimenzionalna produkta. Jedan od tih produkata bit će funkcija ostalih dvaju.

Zbog posebne strukture dimenzionalne matrice u našem primjeru, u kojemu svaka veličina ima eksponent različit od 0 samo u jednom retku, jedan od bezdimenzionalnih produkata *mora* biti C_B/C_S (ili C_S/C_B). Ako recipročnu vrijednost ne smatramo novom mogućnosti, ostala se dva moraju izabrati od tri moguća: pd, pT i T/d. Recimo da smo izabrali pd i T/d. Tako smo uz pomoć Buckinghamova teorema od

$$C_B = F\,(C_S, p, d, T) \tag{40}$$

stigli do

$$C_B = C_S \cdot \varphi\,(pd,\ T/d). \tag{41}$$

O funkciji φ dimenzionalna analiza ne govori ništa. Međutim, dobiveni rezultat nije za podcjenjivanje. Prvo, on pokazuje da smo za složeno ukamaćivanje, ako postoji veličina d, umjesto da odmah kažemo da je *koeficijent promjene* funkcija vremena trajanja ukamaćivanja (uz zadane p i d), mogli reći da je *buduća vrijednost kapitala* funkcija *sadašnje vrijednosti* i *vremena ukamaćivanja* i zatim pomoću dimenzionalne analize stići do prve tvrdnje kao do rezultata. Drugo, (41) vrijedi za svako složeno ukamaćivanje za koje je $d > 0$, a ne samo za dekurzivno. To znači da iz dimenzionalne analize proizlazi da (41) mora vrijediti i za složeno *anticipativno* ukamaćivanje.

4.3. Složeno anticipativno ukamaćivanje

Za anticipativno ukamaćivanje često se kaže, pa tako i u Ekonomskom leksikonu (1995:25), da je to "način obračuna kamata gdje se kamate obračunavaju unaprijed, na početku svakog razdoblja, od konačne vrijednosti". Bez obzira na etimologiju, zastupljenost u literaturi, bankarsku praksu i eventualne druge razloge, "obračunavanje kamata unaprijed" ne izražava bit anticipativnog ukamaćivanja. U skladu s takvom interpretacijom, koja se u nekim slučajevima složenog anticipativnog ukamaćivanja može provesti prilično "nategnuto", a u nekim ni tako, "zajmom" se ne naziva vrijednost kapitala što ga dobivamo na raspolaganje "danas", već vrijednost tog kapitala nakon određenoga vremenskog razdoblja, u primjerima najčešće nakon jedne godine. Racionalna bit opisa anticipativnog ukamaćivanja upravo je onaj dio prethodnog citata u kojemu se kaže da se kamate obračunavaju *od konačne vrijednosti*.

Raspoloživi prostor ne omogućuje razlaganje zbog čega se sintagmom "obračunavanje kamata unaprijed" nije prikladno koristiti pri definiranju anticipativnog ukamaćivanja. No najvažnije je što to nije ni *potrebno*. Analogno složenom dekurzivnom ukamaćivanju, iznos složenih anticipativnih kamata za jedno razdoblje ukamaćivanja bit će jednak iznosu jednostavnih anticipativnih kamata izračunanih primjenom zadane kamatne stope na vrijednost kapitala *na kraju* tog razdoblja ukamaćivanja. Također će, kao pri dekurzivnom ukamaćivanju, jedno razdoblje ukamaćivanja biti upravo osnovno razdoblje d.

Iz formule (7) slijedi da će za osnovno razdoblje d pri složenom anticipativnom ukamaćivanju vrijediti

$$V(d) = \frac{1}{1 - qd}, \tag{42}$$

pri čemu je kao oznaka anticipativne kamatne stope upotrijebljen znak q. Na sličan način kao pri složenom dekurzivnom ukamaćivanju slijedi da za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja T vrijedi

$$V(T) = V\left(d \cdot \frac{T}{d}\right) = [V(d)]^{T/d} = \left(\frac{1}{1 - qd}\right)^{T/d}. \tag{43}$$

Tada je buduća vrijednost kapitala C_B jednaka:

$$C_B = C_S \cdot \left(\frac{1}{1 - qd}\right)^{T/d}. \tag{44}$$

Jednako je tako u kontinuiranom slučaju

$$C(t) = C(0) \cdot \left(\frac{1}{1 - qd}\right)^{t/d}. \tag{45}$$

Formule (44) i (45) dimenzionalno su homogene, što se može provjeriti na isti način kao i pri dekurzivnom ukamaćivanju. Ujedno vidimo da se one mogu napisati pomoću istih bezdimenzionalnih produkata, ali je tada funkcionalna veza među njima drugačija:

$$\kappa = \left(\frac{1}{1 - \pi}\right)^{\nu}. \tag{46}$$

Dimenzionalno homogene formule omogućuju lako uočavanje još jedne razliku između složenoga dekurzivnog i anticipativnog ukamaćivanja. Kako vrijednost kapitala uvijek mora biti pozitivna, takav mora biti i koeficijent promjene. Iz (21) proizlazi da je nužan i dovoljan uvjet za to da je $V(d) > 0$. Pri dekurzivnom ukamaćivanju iz (22) slijedi da između dekurzivne kamatne stope p i osnovnog razdoblja na koje se kamatna stopa odnosi d vrijedi relacija

$$-\frac{1}{d} < p < +\infty. \tag{47}$$

Pri anticipativnom ukamaćivanju iz (42) se vidi da je relacija između kamatne stope q i osnovnog razdoblja d drugačija:

$$-\infty < q < \frac{1}{d}. \tag{48}$$

Obje relacije obuhvaćaju i negativnu kamatnu stopu. Puno opravdanje takvog pristupa jest da treba imati na umu i realnu kamatnu stopu, koja može biti i negativna, a ne samo nominalnu, koja je redovito pozitivna. Posljedica intervala variriranja kamatnih stopa, uz zadano osnovno razdoblje d, jest da dekurzivna i anticipativna kamatna stopa mogu biti jednake samo ako su iz intervala

$$-\langle\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\rangle. \tag{49}$$

To se najčešće ne spominje kad se u literaturi uspoređuju složene kamate uz nominalno *jednaku* dekurzivnu i anticipativnu kamatnu stopu (i isti d). Osim toga, čini se da je od nominalne jednakosti mnogo važniji pojam *ekvivalentnih* kamatnih stopa.

5. Ekvivalentne kamatne stope i primjena

5.1. Definicija ekvivalencije kamatnih stopa

U Rječniku bankarstva i financija (1993:215) ovako se objašnjava ekvivalentnost kamatnih stopa: “Za dvije kamatne stope (...) kaže se da su ekvivalentne ako su kamate obračunate po obje stope jednake.” To ćemo prihvatiti kao bit pojma ekvivalentnosti kamatnih stopa.

Zanimljiv je i ispušteni dio citata koji glasi: “npr. neka je jedna mjesečna, a druga godišnja”. U sljedećoj se rečenici nastavlja: “Kod jednostavnog obračuna ekvivalentna stopa se zove proporcionalna ili relativna, a kod složenog obračuna se zove konformna stopa.” Takva bi tvrdnja bila primjer miješanja mjernih jedinica vremena i osnovnog razdoblja d. Naime, ono što se naziva relativnim kamatnjakom u jednostavnom ukamaćivanju, kao što pokazuju i numerički primjeri u već spomenutom radu Relića i Baričevića (1994), nije ništa drugo nego izražavanje *iste* kamatne stope različitim mjernim jedinicama.

Tako je u primjeru 1.(a) za neku glavnicu zadan “godišnji kamatnjak 12” i vrijeme trajanja ukamaćivanja 4 dana. Izračunani relativni kamatnjak za “razdoblje duljine osnovnog intervala kapitalizacije”, tj. za 1 dan iznosi 12/365. Prisjetimo li se našeg primjera iz odjeljka o jednostavnom ukamaćivanju, zamijetit ćemo da je zapravo riječ o preračunavanju kamatne stope od 12% godišnje, koja je izražena jedinicama 1/godina, na jedinice 1/dan. Pritom je 1 dan upravo mjerna jedinica vremena, a ne “osnovno razdoblje ukamaćivanja” jer se taj pojam u kontekstu jednostavnog ukamaćivanja i ne može smisleno definirati.

Kako stoji s ekvivalentnim kamatnim stopama u složenom ukamaćivanju? Prije svega, vidjeli smo da pri složenom ukamaćivanju općenito nije dovoljno poznavati samo kamatnu stopu, već i osnovno razdoblje na koje se ona odnosi, kao i način ukamaćivanja (dosad smo spominjali dekurzivni i anticipativni). Osim toga, u složenom su ukamaćivanju primarna stanja kapitala u različitim trenucima, a kamate za određeno razdoblje razlika su tih stanja.

Stoga kad kažemo da su dvije složene kamatne stope ekvivalentne, onda to znači da su uz određena osnovna razdoblja i načine ukamaćivanja za svaku sadašnju vrijednost kapitala C_S i za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja T odgovarajuće buduće vrijednosti kapitala jednake.

Relacija (21) omogućuje dokazivanje da su dvije složene kamatne stope ekvivalentne *onda i samo onda* ako postoji vrijeme trajanja ukamaćivanja $T_0 \neq 0$ takvo da su za zadane kamatne stope, osnovna razdoblja i načine ukamaćivanja koeficijenti promjene kapitala jednaki:

$$V_1(T_0) = V_2(T_0)\,. \tag{50}$$

Naime, tada će za *svaki T* vrijediti

$$V_1(T) = V_1\!\left(\frac{T}{T_0}\cdot T_0\right) = [V_1(T_0)]^{T/T_0} = [V_2(T_0)]^{T/T_0} = V_2\!\left(\frac{T}{T_0}\cdot T_0\right) = V_2(T). \tag{51}$$

Prema definiciji koeficijenta promjene V, za jednake će sadašnje vrijednosti biti jednake i buduće vrijednosti kapitala.

5.2. Ekvivalentne dekurzivne stope

Neka je uz osnovno razdoblje d_1 zadana složena dekurzivna kamatna stopa p_1. Kolika je ekvivalentna kamatna stopa ako je ukamaćivanje i dalje dekurzivno, ali je osnovno razdoblje $d_2 \neq d_1$? Prema prethodnom rezultatu, ekvivalentnost stopa ne ovisi o tome za koje su vrijeme trajanja ukamaćivanja koeficijenti promjene jednaki, pa je najjednostavnije da to bude upravo za d_2.

Uzevši u obzir formulu (24) dobivamo

$$1 + p_2 d_2 = (1 + p_1 d_1)^{d_2/d_1}, \tag{52}$$

što nas neposredno vodi do toga da je složenoj dekurzivnoj kamatnoj stopi p_1 uz osnovno razdoblje d_1 ekvivalentna, uz osnovno razdoblje d_2, složena dekurzivna kamatna stopa

$$p_2 = \frac{(1 + p_1 d_1)^{d_2/d_1} - 1}{d_2}\,. \tag{53}$$

Spomenimo najprije da je formula (53) dimenzionalno homogena: lako se verificira da brojnik razlomka na desnoj strani jednakosti pripada dimenziji **1**, a nazivnik dimenziji **T**, pa je dimenzija razlomka $\mathbf{T^{-1}}$, što je i dimenzija kamatne stope na lijevoj strani. Nadalje, formula je općenita i vrijedi za sve d_1 i d_2 (koji su u dekurzivnom ukamaćivanju prema definiciji pozitivni): nije važno koji je veći, a koji manji, niti jesu li sumjerljivi.

Sada ćemo pojam ekvivalentnih kamatnih stopa povezati s pojmovima relativne i konformne kamatne stope, koji se često spominju u našoj literaturi. Okvir problema obično se postavlja kao u radu Šege (1993:23-27). Zadana je kamatna stopa i uz nju *vremensko razdoblje različito* od zadanoga osnovnog razdoblja ukamaćivanja. Kako izračunati složene kamate? Prema istom radu, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu, pri čemu "valja voditi računa da je vremensko razdoblje kapitalizacije osnovica za obračun kamata" i "vrijeme izraziti u temeljnom vremenskom razdoblju kapitalizacije".

Prije nastavka izlaganja napomenimo da Šego *nominalnom* ili *zadanom* kamatnom stopom naziva propisanu (zakonom ili ugovorom) kamatnu stopu "za temeljno razdoblje kapitalizacije". Međutim, prema podjeli koja je prisutna posebice zastupljena u stranoj literaturi i bankarskoj praksi, objavljena ili ugovorena kamatna stopa može biti *nominalna* ili pak *efektivna*. O nominalnoj i efektivnoj kamatnoj stopi nešto ćemo više reći kasnije. Kako je, dakle, taj pojam nominalne kamatne stope uži od pojma nominalne kamatne stope iz navedenog Šegina rada, u citatima ćemo zadržati izraz "nominalna kamatna stopa", ali ćemo pritom misliti na "zadanu kamatnu stopu", koja prema spomenutom razlikovanju može biti nominalna ili efektivna.

Pri preračunavanju zadane stope najprije se određuje "koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema temeljnom vremenskom razdoblju nominalne kamatne stope:

$$m = \frac{n_1}{n_2},$$

pri čemu je n_1 duljina temeljnog vremenskog razdoblja na koje se odnosi nominalna (ugovorena) kamatna stopa p, a n_2 duljina temeljnog razdoblja u kojem se obavlja kapitalizacija".

Nakon primjera za određivanje veličine m, kaže se:

"Podijelimo li nominalnu kamatnu stopu p sa m, dobivamo relativnu kamatnu stopu p_r:

$$p_r = \frac{p}{m},$$

koja se izražava u jedinici vremena ukamaćivanja."

Iako se u citatu misli na kamatnjake, kako je kamatnjak stopa pomnožena sa 100, formula za kamatne stope je identična.

Pravo značenje tako definirane relativne kamatne stope najbolje se vidi iz primjera u kojemu neka osoba uloži u banku 10.000 HRD na 6 godina. "S kolikim iznosom će ta osoba raspolagati na kraju 6. godine ako banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu 120, a obračun kamata je složen i dekurzivan i (*a*) godišnji, (*b*) mjesečni, (*c*) dvogodišnji i banka koristi relativni kamatnjak?"

Za slučaj (*a*) navodi se da je $m = 1$, a stanje kapitala (u HRD) na kraju 6. godine (C_6) izračunava se iz izraza

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{120}{100}\right)^6, \tag{54}$$

što je jednako 1 133 799.

Za (*b*) je $m = 12$, a $p_r = 120/12 = 10$, broj razdoblja kapitalizacije je $6 \cdot 12 = 72$, a traženi iznos (u HRD)

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{72} = 9\,555\,938, \tag{55 }$$

dok je za (*c*) $m = 0{,}5$ i $p_r = 120/0{,}5 = 240$, broj razdoblja kapitalizacije je $6 \cdot 0{,}5 = 3$, a traženi iznos (u HRD)

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{240}{100}\right)^{3} = 393\,040, \tag{56}$$

Usporedimo li navedene brojčane izraze međusobno, kao i s formulom (24)

$$C_B = C_S\,(1 + pd)^{T/d}, \tag{57}$$

možemo vidjeti da u sva tri slučaja vrijednost kapitala na kraju 6. godine računamo uz **jednaku kamatnu stopu**, ali uz različita osnovna razdoblja. Naime, uz sadašnju vrijednost kapitala C_S od 10.000 HRD i vrijeme trajanja ukamaćivanja T od 6 godina u slučaju (a) osnovno razdoblje d_1 jednako je 1 godini. Kamatna stopa p je 120% godišnje, pa su sve jedinice koherentne i neposrednim se uvrštavanjem dobiva izraz (54).

U slučaju (b) d_2 je 1 mjesec. Kamatna je stopa i dalje p, ali umjesto u mjernoj jedinici G^{-1}, sada je izražena u M^{-1}:

$$p = 120\%\ G^{-1} = 120\%\ (12\ M)^{-1} = 10\%\ M^{-1}.$$

Jednako je tako $T = 6\ G = 6 \cdot 12\ M = 72\ M$. Uvrštavanje brojčanih vrijednosti u (57) daje izraz (55).

Iz toga vidimo da su zadana i relativna kamatna stopa iste stope izražene različitim mjernim jedinicama. Ako pod kamatnom stopom mislimo na dimenzionalnu veličinu, relativna bi stopa bila, zapravo, zadana stopa izražena pomoću mjerne jedinice za vrijeme jednake zadanom osnovnom razdoblju. Veličina m pritom je, zapravo, omjer *mjerne jedinice* za vrijeme pomoću koje je izražena zadana kamatna stopa i osnovnog razdoblja kao nove *mjerne jedinice* za vrijeme. Analogni se omjer pojavljuje pri utvrđivanju novog brojčanog iznosa bilo koje veličine nakon izbora nove mjerne jedinice za tu veličinu.

Sam, pak, mjerni broj relativne stope $\{p_r\}$ istodobno je jednak kamatnom koeficijentu koji je umnožak zadane kamatne stope i osnovnog razdoblja. Naime, ako je zadana kamatna stopa p izražena pomoću mjerne jedinice za vrijeme $[t]$, onda je njezin mjerni broj $\{p\}$ jednak $p/[t]^{-1}$. Prijelaz na novu mjernu jedinicu za kamatnu stopu d^{-1} zahtijeva množenje mjernog broja sa $[t]^{-1}/d^{-1}$, te je

$$\{p_r\} = \{p\} \cdot [t]^{-1}/d^{-1} = p/[t]^{-1} \cdot [t]^{-1}/d^{-1} = pd. \tag{58}$$

Napomenimo da zbog dimenzionalne homogenosti formule (57) preračunavanje zadane kamatne stope na jedinicu za vrijeme jednaku osnovnom razdoblju u takvom tipu problema uopće nije bilo nužno. Važno je samo da sve jedinice budu koherentne. Kako je $p = 120\%\ \mathrm{G}^{-1} = 1{,}2\ \mathrm{G}^{-1}$, $T = 6$ G, a $d_2 = 1$ M, osnovno razdoblje d_2 mogli smo izraziti godinama i tada brojčane vrijednosti uvrstiti u (57). Naime, $d_2 = 1\ \mathrm{M} = 1/12$ G, te dobivamo

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{120}{100} \cdot \frac{1}{12}\right)^{\frac{6}{1/12}} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{72}, \tag{59}$$

dakle, izraz ekvivalentan izrazu (55).

Analogna razmatranja mogu se provesti i u slučaju (c), samo što bi tada jedinica za vrijeme bila 2 godine. Kako u sva tri slučaja imamo istu kamatnu stopu, a različita osnovna razdoblja, dobivamo, naravno, i tri različite buduće vrijednosti kapitala, što je u skladu s onim što smo već rekli o ekvivalentnosti kamatnih stopa.

Prema istom radu, *konformna kamatna stopa* daje odgovor na pitanje kako valja postupiti ako je $m \neq 1$, to jest koju stopu valja koristiti da bi učinci kapitalizacije uz primjenu te stope bili jednaki učincima zadane stope p.

Umjesto izvornih formula, koje se prema uspostavljenom razlikovanju odnose na kamatnjake, odgovarajuća formula za konformnu kamatnu stopu bila bi za $m > 1$

$$p' = \sqrt[m]{1 + p} - 1, \tag{60}$$

dok se za $m < 1$ uvodi oznaka $M = 1/m$, pa prethodna formula postaje

$$p' = (1 + p)^M - 1. \tag{61}$$

Vidimo da formule (60) i (61) nisu dimenzionalno homogene: zbraja se broj 1 i kamatna stopa, koja nije broj.

U primjeru koji je u svemu jednak prethodnome osim što banka ne primjenjuje relativni već konformni kamatnjak, sada se navodi da je za slučaj (a) $m = 1$ i nije potrebno računati konformnu stopu jer je $p'^* = p^* = 120$, a traženi iznos jednak onome iz (54).

U slučaju (b) $m = 12$, pa je konformni kamatnjak

$$p'^* = 100\left(\sqrt[12]{1 + \frac{120}{100}} - 1\right) = 6{,}79114, \tag{62}$$

broj razdoblja kapitalizacije $6 \cdot 12 = 72$, a traženi iznos (u HRD) $10.000 \cdot 1{,}0679114^{72} = 1\,133\,799$.

U slučaju (*c*) $m = 0{,}5$, odnosno $M = 1/0{,}5 = 2$, konformni je kamatnjak

$$p'^{*} = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{120}{100}\right)^{2} - 1\right) = 384, \tag{63}$$

broj razdoblja kapitalizacije $6 \cdot 0{,}5 = 3$ i traženi iznos (u HRD) $10.000 \cdot 4{,}84^{3} = 1\,133\,799$.

U sva tri slučaja dobili smo jednake iznose, pa je očito riječ o ekvivalentnim stopama. Kako je općenito valjana formula za ekivalentne stope (53), izračunajmo stopu p_2 koja je uz osnovno razdoblje $d_2 = 1$ M ekvivalentna stopi $p_1 = 1{,}2\ \mathrm{G}^{-1}$ uz osnovno razdoblje $d_1 = 1$ G. Pritom ćemo se kao mjernom jedinicu za vrijeme koristiti godinom G. Za formulu (53) potreban nam je omjer $d_2/d_1 = 1/12$, te imamo

$$p_2 = \frac{(1 + 1{,}2\ \mathrm{G} \cdot 1\ \mathrm{G}^{-1})^{1/12} - 1}{1/12\ \mathrm{G}} = 12 \cdot (2{,}2^{1/12} - 1)\ \mathrm{G}^{-1} = \tag{64}$$

$$= 12 \cdot (1{,}0679114 - 1)\ \mathrm{G}^{-1} = 12 \cdot 0{,}0679114\ \mathrm{G}^{-1}.$$

Ako to izračunamo do kraja, dobit ćemo da je dekurzivnoj kamatnoj stopi od 120% godišnje uz osnovno razdoblje od 1 godine ekvivalentna dekurzivna kamatna stopa od 81,49368% godišnje uz osnovno razdoblje od 1 mjeseca. No kako je 1 G = 12 M, iz posljednjeg izraza u (64) vidi se da je p_2 jednaka i 6,79114% mjesečno. Ta brojčana vrijednost upravo je bio konformni kamatnjak u slučaju (*b*).

Proizlazi da bi konformna stopa bila stopa koja je ekvivalentna zadanoj uz novo osnovno razdoblje i mjernu jedinicu za vrijeme jednaku tom osnovnom razdoblju. To se može i općenito dokazati.

Neka je p_1 nominalna kamatna stopa i d_1 osnovno razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa. Primjenimo li već korištenu notaciju za mjerne brojeve, neka je $\{p_1\}$ mjerni broj nominalne kamatne stope kad je d_1 i mjerna jedinica za vrijeme. Tada je $p_1 = \{p_1\}d_1^{-1}$, jer kamatna stopa pripada dimenziji $\mathbf{T^{-1}}$, te je $p_1 d_1 = \{p_1\}$. Omjer d_2/d_1 bezdimenzionalni je produkt i to je zapravo $1/m$. Stoga iz (53) proizlazi

$$p_2 = \frac{(1 + \{p_1\})^{1/m} - 1}{d_2}. \tag{65}$$

Napomenimo da dok je kod relativne kamatne stope m bio omjer dvaju mjernih jedinica, kod konformne kamatne stope m je omjer dviju ekonomskih veličina, i to osnovnih razdoblja. Ako sad s $\{p_2\}$ označimo mjerni broj kamatne stope p_2, ali uz mjernu jedinicu za vrijeme jednaku d_2, (65) se svodi na

$$\{p_2\}d_2^{-1} = \frac{(1 + \{p_1\})^{1/m} - 1}{d_2}. \tag{66}$$

Nakon množenja obiju strana prethodne jednakosti s d_2, dobivamo (60) odnosno (61), što je i trebalo dokazati.

Dimenzionalna analiza tako nam jasno pokazuje da primjena relativne ili konformne stope ovisi o tome je li u izrazu "godišnja kamatna stopa 120", "kamatna stopa 120% godišnje" ili sličnom izrazu 1 godina *samo* mjerna jedinica za vrijeme ili je to i osnovno razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa. Ako to nije izričito navedeno ili određeno, automatski je otvoren prostor za moguće nesporazume, koji su u praksi česti.

Prethodna rasprava o relativnoj i nominalnoj kamatnoj stopi provedena je uz pretpostavku da je ono što se u formulama financijske matematike označava kamatnom stopom zapravo mjerni broj kamatne stope. Međutim, spomenuli smo da se pod nazivom kamatna stopa može misliti i na bezdimenzionalni produkt $\pi = pd$, koji smo prigodno nazvali kamatnim koeficijentom. Ima li smisla govoriti o relativnome i konformnome kamatnom koeficijentu?

Što, naime, ako bismo imali zadani kamatni koeficijent π_1 i osnovno razdoblje d_1 na koje se on odnosi, a traži se kamatni koeficijent za drugo osnovno razdoblje d_2? Tada neki relativni kamatni koeficijent π_1/m, pri čemu je $m = d_1/d_2$, ne bi imao smisla jer bi to bio umnožak prve kamatne stope i drugoga osnovnog razdoblja. Ako se mijenja osnovno razdoblje, novi kamatni koeficijent mora biti dobiven iz ekvivalentne stope. Iz formule (53) dobivamo

$$p_2 d_2 = (1+p_1 d_1)^{1/m} - 1, \tag{67}$$

što se može pisati kao

$$\pi_2 = (1+\pi_1)^{1/m} - 1. \tag{68}$$

Ta formula također odgovara formulama (60) odnosno (61), pa bi se moglo govoriti o konformnom kamatnom koeficijentu. Relativni kamatni koeficijent bio bi, eventualno, prva aproksimacija konformnoga kamatnog koeficijenta, a izvan toga, "nekritičko nametanje *proporcionalnosti*" (Muškardin, 1985:80).

U radu iz kojega su preuzeti prethodni primjeri, Šego (1993:23-24) navodi da se govori o *proporcionalnoj* metodi, ako se pri obračunu složenih kamata umjesto zadanog primjenjuje relativni kamatnjak a ako se primjenjuje konformni, riječ je o *konformnoj* metodi. Nadalje, kako se primjenom proporcionalne metode dolazi do različitih iznosa konačne vrijednosti glavnice, ona se po pravilu ne koristi, odnosno "može se koristiti jedino ako greška koja nastaje njezinom primjenom nije značajna". Prema prethodnim razmatranjima mogli bismo reći: ako se pod relativnim kamatnjakom misli na relativni kamatni koeficijent, onda je to točno. Upotreba, pak, relativne kamatne stope ne mora biti unaprijed isključena.

Naime, u stranoj literaturi i bankarskoj praksi upotrebljavaju se pojmovi *nominalne* i *efektivne* stope. Pritom se često kamatna stopa koju bismo u terminima ovog rada definirali kao kamatnu stopu izraženu pomoću mjerne jedinice za vrijeme jednake osnovnom razdoblju naziva *periodna* stopa. Ako je zadana stopa *nominalna*, tada je prema njezinoj definiciji periodna stopa jednaka *relativnoj* stopi. Ako je, pak, zadana stopa *efektivna*, periodna stopa bila bi jednaka *konfomnoj* stopi.[22] Kako nominalna stopa općenito nije periodna stopa, moglo bi se reći da je njezina primjena više u skladu s kamatnom stopom kao *dimenzionalnom* veličinom.

Cijelo vrijeme dok smo govorili o pojmovima "relativno" i "konformno" to je bilo u kontekstu *složenoga* (dekurzivnog) *ukamaćivanja*. Možda je u raspravi o proporcionalnoj i konformnoj metodi najzanimljivije to da se pod primjenom *konformne* ili *proporcionalne metode* u praksi, ali i u teoriji, zapravo misli na primjenu *složenoga* ili *jednostavnog* ukamaćivanja.[23]

Teško se upustiti u sveobuhvatnu raščlambu kako dolazi do toga da pitanje "relativne ili konformne stope" postaje pitanje jednostavnoga ili složenog ukamaćivanja. Ipak, pokušat ćemo doći do nekih zaključaka i dalje se koristeći radom Šege (1993).

Za ilustraciju primjene proporcionalne ili konformne metode navode se dva primjera od kojih prvi glasi (Šego, 1993:24-25):

"Netko uloži 10 000 HRD uz 100% godišnjih dekurzivnih kamata na 6 mjeseci. S kolikim će iznosom raspolagati ta osoba na kraju 6. mjeseca (računajući od dana kada je uložila navedeni iznos) ako se kamate računaju uz primjenu (a) proporcionalne, (b) konformne metode?"

"Primjena proporcionalne metode znači da se kamate računaju uz primjenu relativne kamatne stope. U ovom slučaju, budući da u temeljnom vremenskom razdoblju na koje se odnose dekurzivne kamate (dakle, godini) imamo 2 razdoblja od 6 mjeseci (dakle, 2 polugodišta), relativna kamatna stopa iznosi

$$p_r = \frac{p}{2} = 50,$$

pa ukupne kamate za razdoblje od 6 mjeseci iznose

$$I_r = \frac{Cp_r}{100} = \frac{10\,000 \times 50}{100} = 5\,000 \text{ HRD."}$$

"Primjena konformne metode znači da se kamate računaju uz primjenu konforme kamatne stope. U ovom slučaju, budući da u temeljnom vremenskom razdoblju na koje se odnose dekurzivne kamate (dakle, godini) imamo 2 razdoblja od 6 mjeseci (dakle, 2 polugodišta), konforma kamatna stopa iznosi

$$p' = 100\times\left(\sqrt{1+\frac{p}{100}}-1\right) = 100\times\left(\sqrt{1+\frac{100}{100}}-1\right) = 100\times(\sqrt{2}-1) = 41{,}42136623,$$

pa ukupne kamate za razdoblje od 6 mjeseci iznose

[22] Osim navedenoga, izraz *efektivna stopa* može značiti i stvarnu cijenu financijskog posla pri čijoj se kalkulaciji uzimaju u obzir i administrativni troškovi, provizije, servisiranje, frakcioniranje i dr., što omogućuje usporedbu različitih izvora financiranja (Rječnik bankarstva i financija, 1993:127-8).

[23] Tako je i u Zakonu o zateznim kamatama (NN 28/96).

$$I' = \frac{Cp'}{100} = \frac{10\,000 \times 41{,}42136623}{100} = 4\,142 \text{ HRD.''}$$

Iz primjera se vidi da je vrijeme trajanja ukamaćivanja 6 mjeseci. Ali sada se više ne definira je li obračun kamata godišnji, mjesečni ili kakav drugi, dakle ne definira se kao u prijašnjim primjerima *osnovno razdoblje*, već se smatra da je *osnovno razdoblje ukamaćivanja* **jednako** *vremenu trajanja ukamaćivanja*. To, naime, nedvosmisleno proizlazi iz prethodnog primjera.

No osnovno razdoblje i vrijeme trajanja ukamaćivanja neovisne su varijable. Stoga više ne možemo govoriti o relativnoj i konformnoj kamatnoj stopi, kako su prije definirane, već vidjeti što iza tih naziva stoji, uz uvjet da za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja (koje ne mora, naravno, biti 6 mjeseci ili 2 godine kao u sljedećem primjeru iz citiranog rada, već može biti bilo koji broj dana, i veći i manji od 365) vrijedi $d = T$.

Prije nastavka pogledajmo čemu su jednake kamate pri složenom dekurzivnom ukamaćivanju. Kako su kamate I za neko razdoblje jednake razlici buduće C_B i sadašnje vrijednosti C_S, iz (24) slijedi da je

$$I = C_S \cdot [(1 + pd)^{T/d} - 1]. \qquad (69)$$

Izraz u uglatoj zagradi na desnoj strani jednakosti (69) jest broj, veličina dimenzije **1**, koji omogućuje dobivanje iznosa kamate jednostavnim množenjem, no koji bismo teško mogli nazvati kamatnom stopom. Ako je $d = T$, vidimo da formula (69) postaje

$$I = C_S \cdot pT. \qquad (70)$$

Dakle, u tom su slučaju (i kao što Šego naglašava *samo u tom slučaju*) jednostavne dekurzivne kamate jednake složenim dekurzivnim kamatama uz jednaku kamatnu stopu i jednako vrijeme trajanja ukamaćivanja.

Što je, dakle, relativna kamatna stopa u proporcionalnoj metodi? Rekonstruirajmo prethodni primjer uz sljedeće oznake i konkretne brojčane vrijednosti i mjerne jedinice:

kamatna stopa	p	100% godišnje = 1 G^{-1}
vremensko razdoblje za navedeni postotak kamata	x	1 godina = 1 G
mjerni broj kamatne stope uz x kao mjernu jedinicu za vrijeme	$\{p\}$ $(= p/x^{-1})$	100% = 1
vrijeme trajanja ukamaćivanja	T	6 mjeseci.

Sada je računana veličina $m = x/T$, što je u primjeru jednako 2. Uzevši u obzir da se u formulama pod kamatnom stopom zapravo pojavljuje njezin mjerni broj, relativna je kamatna stopa

$$p_r = \frac{\{p\}}{m} = \frac{p/x^{-1}}{x/T} = px \cdot x^{-1}T = pT. \tag{71}$$

Proizlazi da je u proporcionalnoj metodi relativna stopa bezdimenzionalni produkt koji odgovara jednostavnom ukamaćivanju uz zadanu kamatnu stopu i vrijeme trajanja ukamaćivanja.

U konformnoj metodi, uz izostavljanje broja 100 jer ne radimo s kamatnjacima, konformna je stopa

$$p' = \sqrt[m]{1 + \{p\}} - 1 = (1 + px)^{1/m} - 1 = (1 + px)^{T/x} - 1, \tag{72}$$

dakle, broj kojim trebamo množiti početnu vrijednost kapitala da bismo dobili iznos složenih kamata uz kamatnu stopu p za vrijeme trajanja ukamaćivanja T i x kao osnovno razdoblje. Kada se, stoga, u stručnim časopisima pojavljuju tablice pod nazivom "konformne stope po danima", to su zapravo prethodni faktori pomnoženi sa 100 za $x = 1$ godina i T od 1 dan do 365 ili 366 dana.

5.3. Ekvivalentna dekurzivna i anticipativna stopa

Pogledajmo i čemu su jednake međusobno ekvivalentne dekurzivna i anticipativna kamatna stopa pri složenom ukamaćivanju. Najjednostavniji je, ali za praksu možda i najzanimljiviji, primjer kada su za obje stope osnovna razdoblja na koja se one odnose jednaka. Označimo dekurzivnu stopu s p, anticipativnu s q, a osnovno razdoblje s d. Da bi te stope bile ekvivalentne, koeficijenti promjene za bilo koje razdoblje, pa tako i za d, moraju biti jednaki. Uz pomoć (22) i (42) izravno dobivamo

$$1 + pd = \frac{1}{1 - qd}, \tag{73}$$

što nas, na analogan način kao u ekvivalentnih stopa pri jednostavnom ukamaćivanju, vodi do

$$p - q - pqd = 0 \tag{74}$$

iz čega slijedi

$$q = \frac{p}{1 + pd} \quad \text{i} \quad p = \frac{q}{1 - qd}. \tag{75}$$

Iz tih dimenzionalno homogenih formula vidimo da prije navedene formule iz Ekonomskog leksikona dane za složeno ukamaćivanje vrijede ako je osnovno razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa za obje stope jednako i ako se osnovno razdoblje služi kao mjerna jedinica za vrijeme. To, kao i prije, znači da nisu općenito valjane.

Povežemo li to s prethodnim izlaganjem, za kvartalno ukamaćivanje i dekurzivnu *efektivnu* godišnju stopu formula iz Ekonomskog leksikona rezultirala bi mjernim brojem ekvivalentne anticipativne efektivne godišnje stope. No ako bi zadana dekurzivna godišnja stopa bila *nominalna*, kao rezultat *ne bismo* dobili mjerni broj ekvivalentne anticipativne nominalne godišnje stope. No formule (75) u oba slučaja daju točan rezultat.

Formule (75) imaju još jednu prednost. Promatrajući ih, upravo upada u oči da bi uz $d = 0$ ekvivalentne dekurzivna i anticipativna kamatna stopa bile *jednake*. Iako je, prema definiciji, pri dekurzivnom i anticipativnom ukamaćivanju uvijek $d > 0$, to nam sugerira da bi u nekom načinu složenog ukamaćivanja, koji bi se mogao tumačiti tako da za nj vrijedi $d = 0$, razlike između dekurzivnog i anticipativnog ukamaćivanje nestale.

5.4. Trenutačno ukamaćivanje

U uvodnom dijelu o složenom ukamaćivanju spominjali smo kontinuirano ukamaćivanje kao ukamaćivanje "u kojem se kamata obračunava svakog trenutka i dodaje glavnici", tj. "nema vremenskog diskontinuiteta između dva obračuna kamata i njihova pribrajanja glavnici" (Ekonomski leksikon, 1995:417).

Tada smo rekli i da bi takva uporaba termina "kontinuirano ukamaćivanje" pripadala tzv. klasičnom pristupu financijskoj matematici, te da ćemo se terminima *kontinuirano* i *diskretno* ukamaćivanje koristiti s obzirom na to kakve vrijednosti može poprimiti varijabla vrijeme, a ne prema načinu obračuna kamata.

U tzv. suvremenom pristupu financijskoj matematici za ukamaćivanje s početka odjeljka rabi se termin "prirodni rast". Čini se, međutim, da bi najprikladniji termin bio "trenutačno ukamaćivanje". Stoga će se u daljnjem tekstu upotrebljavati upravo taj termin, a tada bi i razlozi za njegov odabir trebali postati jasniji.

Uobičajeni način izvođenja formule za trenutačno ukamaćivanje u klasičnom pristupu prikazat ćemo prema radu Martića (1980:1-2).[24] Polazi se od formule za konačnu vrijednost C_n uz godišnju kamatnu stopu p nakon n godina:

$$C_n = C_0\,(1+p)^n. \tag{76}$$

Ako se kamate dodaju glavnici m puta u godni, uz relativnu ispodgodišnju kamatnu stopu p/m, C_0, za n godina glavnica naraste na

$$C_{mn} = C_0\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mn}. \tag{77}$$

Iako Martić naglašava da relativna ispodgodišnja kamatna stopa nije ekvivalentna godišnjoj i daje model za konformnu stopu, ipak se za daljnje izvođenje koristi baš formulom (77). Upravo je ta činjenica osnova kritike klasičnog pristupa kod Muškardina (1985:79-82) i Šege (1991:13-16).

Nastavak izvoda svodi se na to da broj potperioda m raste, pa se kamate pribrajaju glavnici u sve kraćim vremenskim razmacima. Taj proces na granici prelazi u, kako Martić kaže, kontinuirano, a mi bismo rekli trenutačno ukamaćivanje:

[24] Od izvornika ćemo odstupiti utoliko što ćemo se umjesto kamatnjakom koristiti kamatnim stopama.

$$\lim_{m\to\infty} = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mn} = e^{np}, \tag{78}$$

te je

$$C_n = C_0 \, e^{np}. \tag{79}$$

Zašto se u izvodu ne rabi konformna stopa? Šego (1991) dokazuje da konformna stopa p', definirana kao u (60), teži 0 kad $m \to \infty$, a konačni je rezultat relacija (76) od koje se u izvodu i krenulo.

Iz opisa izvoda u klasičnom pristupu proizlazi da se sve formule odnose na *mjerne brojeve*. I u tom se kontekstu pokazuje prednost dimenzionalno homogenih formula. Naime, krenemo li od formule za složeno dekurzivno ukamaćivanje (24)

$$C_B = C_S \, (1 + pd)^{T/d}, \tag{80}$$

i pustimo da d teži 0 uz konstantno p, *odmah* dobivamo

$$C_B = C_S \, e^{pT}. \tag{81}$$

Tada bi p trebalo shvatiti kao *nominalnu*, nasuprot *efektivnoj*, kamatnu stopu, a trenutačno ukamaćivanje kao rezultat graničnog procesa kad osnovno razdoblje na koje se odnosi kamatna stopa teži 0. Kako za $d = 0$ ne možemo više govoriti o *razdoblju*, već o *trenutku*, odatle i prikladnost naziva *trenutačno ukamaćivanje*.

Još očitije isti se rezultat dobiva i iz dimenzionalno homogene formule za složeno *anticipativno* ukamaćivanje (44), što se bolje vidi iz oblika

$$C_B = C_S \, (1 - qd)^{-T/d}. \tag{82}$$

Ako je q konstantno, a d teži 0, rezultat je opet (81), s tim što se umjesto p pojavljuje q, jer je lim $(1-x)^{-1/x}$ kad x teži 0 također e.

Kao osnovni nedostatak izvoda u klasičnom pristupu čini se sljedeće. U graničnom procesu uvijek krećemo od formule (80) i nekog d. Kako je p dekurzivna kamatna stopa, ona, kao što smo vidjeli, uvijek mora biti *veća* od $-1/d$. Tada je izvod formule (81) valjan za te kamatne stope. Međutim, formula (81) "podnosi" *sve* vrijednosti, dakle i one kamatne stope *manje* od $-1/d$. Da bi izvod bio valjan i za dio tih stopa, moramo krenuti od manjeg polaznog d. Vidimo da nema nijedne negativne kamatne stope za koju izvod ne bi bio moguć ako izaberemo dovoljno mali d, ali i da za svaki *konkretni d* postoje kamatne stope koje nisu obuhvaćene tim izvodom.[25]

U suvremenom pristupu financijskoj matematici uvodi se, kako smo već spomenuli, model *prirodnog rasta* (Muškardin, 1985:77; Šego, 1991). Model se izvodi iz *općeg zakona kapitalizacije* (Car, 1973:432-434) kao slučaj kad je tzv. *intenzitet rasta* λ konstantan. Tada, u kontinuiranom slučaju, za proizvoljni realni broj λ vrijedi

$$C(t) = C(0) \, e^{\lambda t}, \tag{83}$$

[25] Ova se teškoća s klasičnim pristupom pojavljuje samo uz negativne kamatne stope, dok se u literaturi, izričito ili prešutno, ponajprije obrađuju pozitivne kamatne stope.

dok je kamatna stopa, označena s i, jednaka

$$i = e^{\lambda} - 1. \tag{84}$$

Muškardin inzistira na tome da je izraz

$$C(t) = C(0)\, e^{it} \tag{85}$$

kvalitativno, ali ne i *kvantitativno* ispravan. Kvantitativno bi bio ispravan kad bi se parametar i interpretirao kao intenzitet rasta, a ne kao kamatna stopa, a upravo se to čini. S pravom upozorava na zbrku u primjeni kad se isti zadatak katkad rješava formulom (85), a katkad formulom za dekurzivno ukamaćivanje.

Čini se, međutim, da je u Muškardinovoj kritici riječ o prevelikom sužavanju pojma kamatne stope na *dekurzivnu kamatnu stopu*. Jer, njegovu definiciju kamatne stope, iz koje proizlazi i formula (84),[26] ne bi zadovoljila ni anticipativna kamatna stopa, kojoj se naziv *kamatna stopa* ne može osporiti. Možda takav stav proizlazi iz toga što parametar λ nije izveden iz ekvivalentnih stopa na kojima inzistira suvremeni pristup. Štoviše, možda su ekvivalentne stope i najbolji put prema trenutačnom ukamaćivanju, ali tada nam ne može pomoći konformna stopa, koja, kao što smo vidjeli, u graničnom slučaju postaje jednaka 0. Tada su nam neophodne *opće*, dakle dimenzionalno homogene formule.

Definirajmo kao *trenutačnu* kamatnu stopu r pridruženu dekurzivnoj kamatnoj stopi p i osnovnom razdoblju d, graničnu vrijednost ekvivalentne dekurzivne stope za osnovno razdoblje d' kad d' teži 0. Prema (53), to je

$$r = \lim_{d' \to 0} \frac{(1 + pd)^{d'/d} - 1}{d'}, \tag{86}$$

i dalje, prema L' Hospitalovu pravilu,

$$r = \lim_{d' \to 0} \left[(1 + pd)^{d'/d} \cdot \ln(1 + pd) \cdot \frac{1}{d} \right] = \frac{\ln(1 + pd)}{d}. \tag{87}$$

Dobivena je veličina dimenzije $\mathbf{T^{-1}}$, kao što kamatna stopa i treba biti. Primijetimo da je za izvod bitno pojavljivanje veličine d' u nazivniku polazne formule.

Sada je najlakše definirati trenutačno ukamaćivanje kao takvo ukamaćivanje za koje su trenutačna kamatna stopa r i njoj pridružena dekurzivna stopa p uz osnovno razdoblje *d ekvivalentne*. To znači da za svako vrijeme trajanja ukamaćivanja T odgovarajući koeficijenti promjene kapitala trebaju biti jednaki, tj.

$$V(r \mid T) = V(p, d \mid T). \tag{88}$$

Uzevši u obzir (87), slijedi da je

$$V(r \mid T) = (1 + pd)^{T/d} = e^{\frac{T}{d}\ln(1 + pd)} = e^{rT}. \tag{89}$$

[26] Za Muškardina (1985:76) kamatna je stopa razlika vrijednosti kapitala na kraju i na početku jediničnoga vremenskog razdoblja podijeljena vrijednošću kapitala na početku tog razdoblja.

Kako je koeficijent promjene omjer buduće i sadašnje vrijednosti kapitala, konačno za trenutačno ukamaćivanje dobivamo formulu

$$C_B = C_S \, e^{rT}. \tag{90}$$

Bez dokaza napominjemo da je definicija trenutačnog ukamaćivanja *dobra* u tom smislu što bi, ako bismo krenuli od neke anticipativne kamatne stope q, ekvivalentne dekurzivnoj stopi p, rezultat bila *ista* trenutačna stopa r.

Formula (90) također vrijedi i za kontinuirani i za diskretni slučaj. U kontinuiranom je dobro poznata, ali se mnogo rjeđe primjenjuje u diskretnom.

U odnosu prema trenutačnom ukamaćivanju, dekurzivno i anticipativno ukamaćivanje mogli bismo zajednički nazvati *intervalnim* ukamaćivanjem. Vidjeli smo da se pri intervalnom ukamaćivanju, ne računajući omjer buduće i sadašnje vrijednosti kapitala, pojavljuju *dva* bezdimenzionalna produkta, a pri trenutačnome samo *jedan*, rT, kao i pri jednostavnom ukamaćivanju. Zaista, pri trenutačnom ukamaćivanju kamatni koeficijent π nema smisla, jer bi on bio jednak $r \cdot d = r \cdot 0 = 0$. Jednako tako, dok kod složenog intervalnog ukamaćivanja imamo i odgovarajuće jednostavno, za trenutačno ukamaćivanje ne možemo uočiti nikakav specifični smisleni koncept jednostavnog ukamaćivanja. Kako zaista nema razloga trenutačno ukamaćivanje ne smatrati *ukamaćivanjem*, možda je to još jedna potvrda teze da je ukamaćivanje u svojoj biti *složeno*.

6. Zaključak

Kamatna je stopa *ekonomska veličina*. Po svojoj biti mogla bi se nazvati *brzinom relativne promjene kapitala*. Već se iz takve "definicije" vidi da ona nije *čist broj*, već dimenzionalna veličina, *recipročna vrijednost vremenskog intervala*. Takvo je i stajalište u ekonomskoj teoriji.

Za mnoge probleme i primjene povezane s ukamaćivanjem financijska je matematika nezaobilazna. Formule financijske matematike po pravilu se odnose na *čiste brojeve*, bilo da su to *mjerni brojevi*, bilo da su *bezdimenzionalni produkti*. Te su formule, naravno, *točne,* ali ograničene. Naime, to nisu formule koje pokazuju odnose između odgovarajućih ekonomskih veličina kao dimenzionalnih veličina, što znači da nemaju *opću* valjanost.

Kad teorija utvrdi dimenzije ekonomskih veličina, primjenom dimenzionalne analize može se lako provjeriti dimenzionalna homegenost matematičkih formulacija teorije, pa čak i upozoriti na mogući izvor nehomogenosti. Prostor za raspravu tu je relativno uzak. No dimenzionalnom se analizom, bez teorije, ne mogu postaviti nove formule. Tu je već polje za raspravu mnogo šire.

Čini se da je jedan od najvećih problema kamatnog računa nerazlučivanje dviju različitih veličina koje inače pripadaju istoj dimenziji: *mjerne jedinice za vrijeme* i ekonomske veličine koju smo nazvali *osnovnim razdobljem na koje se odnosi kamatna stopa*. Primjer za miješanje tih dvaju pojmova možemo naći čak i u De Jonga koji je bez sumnje, napisao temeljnu knjigu o dimenzionalnoj analizi u ekonomiji. Te dvije veličine *mogu biti* jednake, ali općenito osnovno razdoblje kao ekonomska veličina neovisno je o mjernoj jedinici kojom se izražava. Štoviše, kamatna stopa pri trenutačnom ukamaćivanju *ne može* se ni izraziti pomoću mjerne jedinice za vrijeme jednake osnovnom razdoblju jer bi ono bilo 0.

Eksplicitnim uvođenjem osnovnog razdoblja postiže se dimenzionalna homogenost formula za složeno dekurzivno i anticipativno ukamaćivanje. Suprotno tome, u jednostavnom ukamaćivanju toj veličini nema mjesta. Neovisno o načelnom značenju takvih formula za bilo koju znanstvenu disciplinu, po mome mišljenju baš dimenzionalno homogene formule omogućuju jasniji uvid u različite probleme vezane za ukamaćivanje.

U radu su izvedene i neke dimenzionalno homogene formule za ekvivalentne kamatne stope. Uz primjenu ekvivalentnih stopa sva tri obrađena načina obračuna složenih kamata vode do istih rezultata, što znači da im je i bit zajednička: u matematičkom smislu eksponencijalna funkcija vremena trajanja ukamaćivanja. Razlika između njih prije svega proizlazi iz načina mjerenja relativne promjene kapitala. Relacije između ekvivalentnih stopa ne ovise o tome je li kapital kontinuirana ili diskretna funkcija vremena, što znači da su u oba slučaja suvislo definirani i dekurzivno, i anticipativno, i trenutačno ukamaćivanje.

Posljednja tvrdnja ima implikacije i šire od kamatnog računa. *Brzina relativne promjene* nije ništa drugo nego možda pogodniji opisni naziv tzv. *stope rasta*. Pritom obično postoji oštra razlika u tome kakva se stopa rasta primjenjuje u kontinuiranim, a kakva u diskretnim modelima. Iz prethodnog proizlazi da je to pitanje prikladnosti, običaja ili nečega trećeg, ali ne i teoretska nužnost.

LITERATURA

ALLEN, R. G. D., 1968. *Macro-economic Theory*. London ; Melbourne ; Toronto : Macmillan : St Martin's Press.

CAR, M., 1973. *Matematika za ekonomiste*. Zagreb : Narodne novine.

DE JONG, F. J., 1967. *Dimensional Analysis for Economists*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company.

EKONOMSKI LEKSIKON, 1995. Zagreb : Leksikografski zavod "Miroslav Krleža" : Masmedia.

MARTIĆ, LJ., 1980. *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*. Zagreb : Informator.

MUŠKARDIN V., 1985. Suvremeni pristup financijskoj matematici. *Ekonomska analiza*, 19(1), 75-99.

PODHORSKI R., 1969. Dimenzijska analiza, dimenzio(nal)na analiza, analiza dimenzija. *U*: *Tehnička enciklopedija*, sv. 3. Zagreb : Jugoslavenski leksikografski zavod.

QUADE, W., 1961. Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gessellschaft,* 13, 24--65. *Transleted in*: F. J. DE JONG, 1967, *Dimensional Analysis for Economists*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 143-199.

RAŽNJEVIĆ, K. 1985. *Fizikalne veličine i mjerne jedinice*. Zagreb : Nakladni zavod Znanje.

RELIĆ, B. i BARIČEVIĆ, E., 1994. Obračun kamata u teoriji i praksi s posebnim osvrtom na zatezne kamate. *Računovodstvo i financije*, 40(12), 48-55.

RJEČNIK BANKARSTVA I FINANCIJA, 1993. Zagreb : Masmedia.

ŠEGO, B., 1991. *Modeli otplate kredita s revalorizacijom*. Zagreb : Informator.

ŠEGO, B., 1993. O metodama obračuna kamata. *Računovodstvo i financije*, 39(4), 19-27.

VIGNAUX, G. A., 1986. Dimensional Analysis in Operations Resaearch. *New Zealand Operations Research*, 14(1), 81-92. Available from: http://www.mcs.vuw.ac.nz/~vignaux/docs/diminor.html [18.5.2000]

ŽILAVEC, M., 1995. Kamatne stope. *Računovodstvo i financije*, 41(6), 33-41.

Josip Stanić: Application of Dimensional Analysis on Interest Rates

Summary

Calculation of interest is a field of finance that is relatively elementary and well known, but in both theory and practice, on some issues very different views or interpretations are still quite common. In such circumstances, there is a need to revalue same basic equations of interest calculation where the use of dimensional analysis is essential.

Although in the literature about interest rates and interest calculation one can seldom find any explicit mention of the dimensionality of interest rates, it can easily be seen that basic equations used in this literature are not dimensionally homogeneous, which means that they are not generally valid. That is why it is important in this field, as in other fields of economics, to have dimensionally homogeneous equations, which in turn means that these equations need to be derived again. This is the aim of this paper. Ppriority is given to the basic issues because a complete and detailed approach would exceed the scope of this paper.

In the first chapter some basic concepts of dimensional analysis used in the paper are explained. In the second chapter we show, in accordance with economic theory and tradition, that the dimension of interest rate is reciprocal to time. In the third chapter we explain the consequences of these facts on equations of simple interest. Simple interest is not fully consistent with the time value of money and so compound interest is especially explained in the fourth chapter. From the general properties of compounding, equations for decursive and anticipated interest are derived and Buckingham's

Theorem is applied to interest calculation. The definition of equivalent interest rates was used to derive the equations to show some problems of interest calculation such as the use of relative and conform rate or equivalent decursive and anticipative rate. By the use of equivalent rates instantaneous compounding was consistently derived.

Key words: dimensional analysis, interest rates, simple interest, compound interest, equivalent rates