

# Primjena spektralnih metoda u geodeziji – računanje korekcije za reljef

Andrijana Knežević<sup>1</sup>, Marko Pavasović<sup>2</sup>

*Učenje znanstvenih metoda podrazumijeva i potvrdu već dobivenih rezultata ponavljanjem istraživanja!*

## 1. Uvod

Nitko od nas, na prvi dojam, sa stajališta studenta, nije spremna na neke nekonvencionalne pristupe polaganju ispita nekog kolegija. Razlozi dizanja praštine oko noviteta na ovom području su različiti, a prevladava "strah" od novog i nepoznatog. Klasičan način "pismeni-usmeni", dobro poznat svima, još uvijek je najviše zastupljen na fakultetima i samim time uvriježen među studentima. No, ne i kod kolegija "Spektralne metode" usmjerjenja "Satelitska i fizikalna geodezija" (stari način studija), koji vodi mentor ovog članka, doc. dr. sc. Mario Brkić, dipl. ing. fizike. Promjena pristupa polaganju ispita ovog kolegija u vidu pisanja znanstvenog članka kao ispitnog zadatka, uključivao je savladavanje FORTRAN programskog jezika, razumijevanje komplikiranih softvera fizikalne geodezije kao i metodologije samog pisanja znanstvenog članka. Cilj takva pristupa ispitu bio je reproducirati dio već objavljenih i dobro poznatih znanstvenih rezultata teme-

ljenih na publikaciji Brkić i Bašić (2000.): Računanje korekcije za reljef u prostornoj i spektralnoj domeni, tj. izračunati korekciju za reljef primjenom egzaktne numeričke integracije (prostorna domena) i brze Fourierove transformacije (spektralna domena) na odabranom području RH te usporediti, vizualizirati i interpretirati dobivene rezultate. Na raspolažanju su bile ulazne datoteke i source kodovi korištenih fortranskih programa - za *prostornu* domenu: digitalni model konstantne gustoće  $\rho = \text{const.} = 2,12 \text{ gcm}^{-3}$  -  $\Delta 1 \text{ km}$ , digitalni model reljefa -  $\Delta 1 \text{ km}$ , ulazni parametri fortranskog programa, fortranski program koji računa korekciju za reljef pomoći numeričke integracije; za *spektralnu* domenu: digitalni model konstantne gustoće  $\rho = \text{const.} = 2,12 \text{ gcm}^{-3}$  -  $\Delta 1 \text{ km}$ , digitalni model reljefa -  $\Delta 1 \text{ km}$ , ulazni parametri fortranskog programa, fortranski program koji računa korekciju za reljef pomoći brze Fourierove transformacije. Također su na raspolažanju bili fortranski programi

za konverziju izlazne datoteke digitalnog modela korekcije za reljef u SURFER-ov \*.GRD format i statistiku.

Dio source koda korištenih FORTRAN programa, TCSUMD za prostornu domenu i TCFFTDP za spektralnu domenu, modificiranih za ovu svrhu, dobiveni su ljubaznošću prof. dr. I. N. Tziavosa u akademске svrhe.

## 2. Općenito o harmonijskoj, transform i Fourier transform analizi

Harmonijska analiza bila je najznačajniji prethodnik spekralne analize, a koristila se za razvoj vremenskog niza podataka u Fourierov red. Ova tehnika računanja dobila je ime zbog svoje mogućnosti reprezentacije zadane periodičke funkcije redom sinus i kosinus funkcija, tj. redom harmonijskih funkcija. Primjenjuje se na pojave s najmanje jednim fundamentalnim periodom (vremenom trajanja jednog ciklusa): u meteorologiji - za razmatranje dnevnog ili godišnjeg hoda meteorološ-

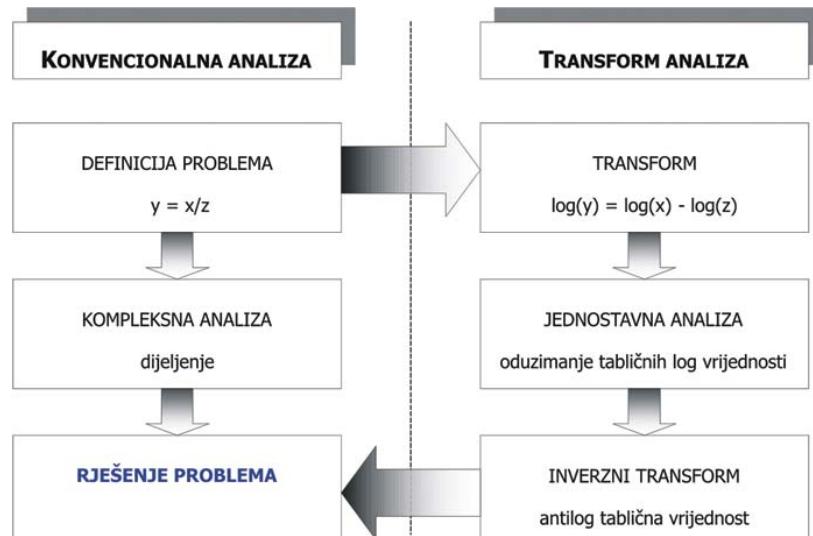
[1] Andrijana Knežević, usmjereno: Satelitska i fizikalna geodezija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: aknezevic@geof.hr

[2] Marko Pavasović, usmjereno: Satelitska i fizikalna geodezija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: mpavasovic@geof.hr

kih elemenata, za predikciju Zemljinih plimnih valova, u seizmologiji - za pronaalaenje periodiciteta potresa itd. Karakterizira ju primjena u vremenskoj odnosno prostornoj domeni.

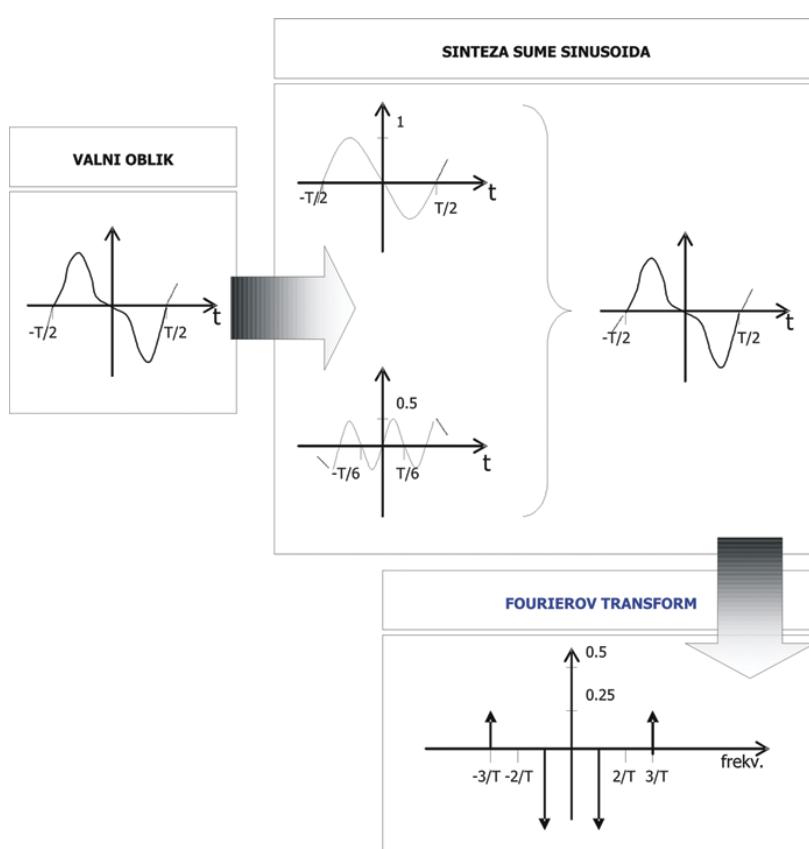
*Transform* omogućuje po-jednostavljenu analizu pri-rješavanje nekog problema. Jedan takav transform, koji smo svi sigurno susreli kroz školovanje, a da nismo ni znali da se radi o transformu jest *logaritam*. Kroz shemu 1 prikazan je odnos konven-cionalne i *transform analize* na jednostavnom primjeru kvocijenta dvaju brojeva  $y = x/z$ .

Korištenjem tehnike transform analize reducirana je kompleksnost traženja rješenja problema iz primjera jer je samo potrebno iz tablica očitati vrijednosti logaritma brojava  $x$  i  $z$  te ih oduzeti i zatim antilogaritmirati što iziskuje manje vremena nego "ručno" dijeljenie dva



**Šema 1:** Odnos konvencionalne i transform analize (slika preuzeta iz Brkić, 2000.)

broja. Jedna od tehnika transforma analize je *Fourierov transform*, koji ima značajnu primjenu u mnogim znanostima. Fourierovi transformi, za razliku od drugih koji se mogu promatrati kao čisto matematički funkcionali, često poprimaju *fizikalno značenje* kao i funkcije koje iz



**Slika 1:** Interpretacija Fourierovog transforma (slika preuzeta iz Brkić, 2000.)

njih proizlaze. Uzmimo za primjer valni oblik, i to optički i električni val i njegovu transformaciju - *spektar*. Podjednako je moguće detektirati kao fizikalno opisive i mjerljive veličine pomoću uređaja za promatranje električnog valnog oblika - osciloskopa te pomoću uređaja za analizu spektra - spektroskopa koji omogućuje promatranje optičkog ili električnog spektra. *Val i spektar su Fourierovi transformi jedan drugoga!* (Brkić, 2000.)

Ako neku fizikalnu pojavu koja fluktuiru u vremenu i/ili prostoru reprezentiramo funkcijom, tada učestalost te fluktuacije odnosno frekvenca i/ili valni broj te funkcije, postaje bitan parametar za njenu definiciju koja je puno značajnija i korisnija neovisna varijabla nego vremensko-prostorne koordinate. Transformacije nekog zapisa u *frekvencijsku ili spektralnu domenu* ne predstavlja promjenu tog zapisa u nešto novo, nego samo *preuređenje* tog zapisa (podataka) u drugačiji red, tj. uređenje u odnosu na frekvenciju, a ne na vrijeme (prostor). Transfom vremenskog i/ili prostornog zapisa se u frekvencijskoj domeni zove spektar (*engl.*

*spectrum).* Dakle, spektar nije ništa drugo nego funkcija koja ovisi o jednoj ili više neovisnih varijabli. Važno je napomenuti da se transform neke funkcije vremenske i/ili prostorne varijable definirane u nekim granicama u funkciju frekvencijske varijable obavlja u tim istim granicama. Bit Fourierove analize nekog valnog oblika je dekompozicija zadanovalnog oblika u sumu sinusoida različitih frekvencija (vidi sliku 1).

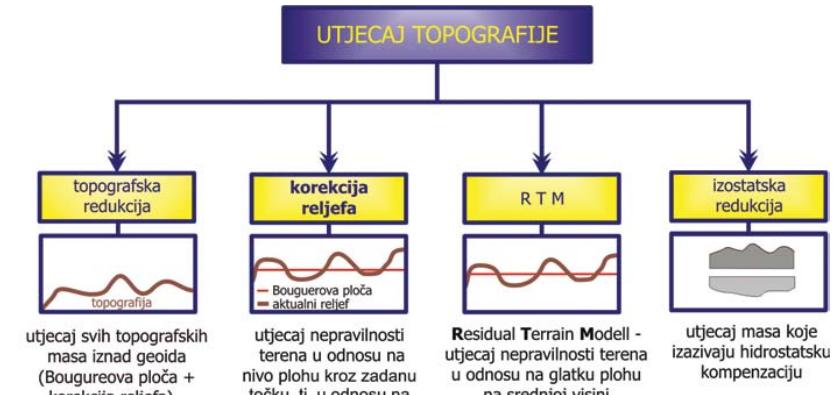
Primjena Fourierovog transforma u fizikalnoj geodeziji:

- problem granične vrijednosti (*engl. Boundary Value Problem*, BVP) po Moloden-skyju
  - računanje topografskih efekata kao npr. korekcije za reljef (*engl. terrain correction*, tc) primjenom brzog Fourierova transforma (*engl. Fast Fourier Transform*, FFT)
  - određivanje geoida *metodom kolokacije* u frekvenčkoj domeni
  - računanje Stokesova integrala na kugli

### 3. Zemljino polje ubrzanja sile teže i topografija

Prema definiciji, geodezija je znanost koja se bavi određivanjem ubrzanja sile teže Zemlje i drugih nebeskih tijela kao funkcije vremena te određivanjem srednjeg Zemljina elipsoida na temelju parametara opažanih na i izvan Zemljine fizičke površine (Torge, 1991.).

Poznavanje vanjskog polja ubrzanja sile teže Zemlje daje nam informaciju o rasporedu masa unutar nje. Ograničimo li se samo na egzaktnu točku fizičke površine Zemlje, intezitet ubrzanja sile teže u toj točki (točkasta vrijednost - terestrički postupak mjerenja) koreliran je s rasporedom podzemnih masa ispod



Shema 2: Utjecaj topografije

nje. Podzemne mase nazivaju se još i topografske mase, (topografija je dio Zemljine kore od geoida do fizičke površine Zemlje) čiji se utjecaj na Zemljino polje ubrzanja sile teže može izraziti pomoću više veličina prikazanih na shemi 2.

Pozabavimo se malo više korekcijom za reljef. Korekcija za reljef uzima u obzir gravitacijsko djelovanje izdizanja odnosno poniranja aktualnog reljefa u odnosu na nivo-plohu kroz zadalu točku odnosno na Bouguerovu ploču (Bašić, 2004.). Bouguerova ploča je definirana uspravno smještenim valjkom koji ima visinu promatrane točke; valjak je smješten u prostoru tako da se promatrana točka nalazi u središtu gornje plohe valjka, a radius valjak se odabire s obzirom na područje koje se uzima u obzir prilikom računanja utjecaja (URL3).

Treba naglasiti kako u oba slučaja, masa iznad Bouguerove ploče i masa ispod Bouguerove ploče dolazi do smanjenja vrijednosti ubrzanja sile teže. Stoga korekcija reljefa ima uvijek pozitivni predznak.

### 4. Općenito o FFT i NI metodama

Metodu numeričke integracije (*engl. Numeric Inte-*

*gration*, NI) primjenjujemo za računanje numeričkih vrijednosti određenih integrala i diferencijalnih jednadžbi (URL1).

Brza Fourierova transformacija (*engl. Fast Fourier Transformation*, FFT) je efikasan algoritam za računanje diskretnog Fourierova transforma (*engl. Discrete Fourier Transform*, DFT) i njegovog inverza (URL2).

Kako bismo formule Fourierova transforma, Fourierova i konvolucijskog integrala koje su razvijane za kontinuirane funkcije primijenili na diskretna mjerila, formule Fourierova transforma potrebno je modificirati. Diskretni Fourierov transform zahtjeva periodičku kontinuiraciju vremenske i frekvenčke funkcije. Tako modificirane formule sada je moguće primjeniti i na računalu.

Brza Fourierova transformacija ima široku i raznoliku primjenu u mnogim aplikacijama poput: digitalne obrade signala, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, algoritma za brzo množenje velikih razlomaka, ali i u geofizičkim znanostima. Fourierova transformacija rastavlja periodičku funkciju na frekvenciju i amplitudu. Glavna prednost FFT-a je u mogućnosti obrade velikog broja podataka u kratkom vremenu. Fourierova analiza omogućuje mode-

liranje funkcije samo u frekvencijskoj domeni, odnosno mogućnost transformacije konvolucijskih integrala prostorne domene u frekvencijsku domenu.

Konvolucija je suma umnožaka dvije funkcije  $f$  i  $g$ , pri čemu konvolucijski teorem omogućuje da se konvolucija u prostornoj domeni izvede jednostavnim množenjem u spektralnoj domeni. Konvolucijski teorem daje odnos između konvolucijskog integrala i njegovog Fourierovog transforma.

## 5. Problem graničnih vrijednosti i DMR

Problem graničnih vrijednosti definira fizikalno-matematičke osnove modeliranja polja ubrzanja sile teže, a rješava problem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za funkciju koja mora zadovoljiti vrijednosti zadane na granici promatranog područja.

Digitalni model reljefa (DMR) je topografski model realne Zemlje koji se može obrađivati kompjuterskim programima u računanju topo-efekata.

U praksi se javlja najčešći problem kod izrade DMR-a, problem ne periodičnosti podataka. Da pojasnimo! Diskretni Fourierov transform definiran je jedino za periodične funkcije što u praksi nije moguće postići jer je prostorna funkcija definirana konačnim brojem točaka mjerena i uzrokuje diskontinuitet na granicama razmatranog područja. Taj diskontinuitet rezultira izobličenjem spektra funkcije (engl. *aliasing*). Da bismo riješili taj problem primjenjujemo zero padding tehniku koja se sastoji u dodavanju nula oko originalnog polja vrijednosti čime se praktično dupliraju polja (postiže se kontinuiranost podataka i proširuje se

razmatrano područje).

## 6. FFT vs NI

Prilikom računanja korekcije za reljef korištene su formule prostorne domene - *ravninska aproksimacija* (1) i *kvadratična aproksimacija* te formula spektralne domene - *kvadratična FFT* aproksimacija (2) prikazana kao suma konvolucija.

$$tc(x_p, y_p, z_p) = G \int_E \int_{h_p}^h \rho \frac{(z - h_p)}{[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]} \partial x \partial y \partial z \quad (1)$$

gdje vrijede slijedeće relacije:

$$\begin{aligned} l^2 &= s_0^2 + (z - h_p)^2 \\ s_0^2 &= (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \\ \Delta h &= h - h_p \\ z_p &= h_p \end{aligned}$$

Za spektralnu domenu:

$$\begin{aligned} tc(x_p, y_p) &= \frac{1}{2} G [F^{-1}\{DH_2 \cdot R_3\} - 2h_p F^{-1}\{DH \cdot R_3\} + h_p^2 F^{-1}\{D \cdot R_3\}] \\ &\quad - \frac{3}{8} G [F^{-1}\{DH_4 \cdot R_5\} - 4h_p F^{-1}\{DH_3 \cdot R_5\} + 6h_p^2 F^{-1}\{DH_2 \cdot R_5\} - 4h_p^3 F^{-1}\{D \cdot R_5\}] \end{aligned} \quad (2)$$

gdje  $F^{-1}$  inverzni Fourierov transform, a izrazi  $R_3$ ,  $R_5$ ,  $D$  i  $DH$  spekttri.

Korekciju za reljef računamo u prostornoj domeni te zatim prelazimo u spektralnu domenu gdje kvadratičnu sumu (kvadratična aproksimacija u prostornoj domeni) raspisujemo kao sumu konvolucija. Zatim pri povratku iz spektralne u prostorno domenu primjenjujemo inverzni Fourierov transform

umnožaka spektara kako bismo izračunali konvoluciju, jer konvoluciji u prostornoj domeni odgovara množenje u spektralnoj.

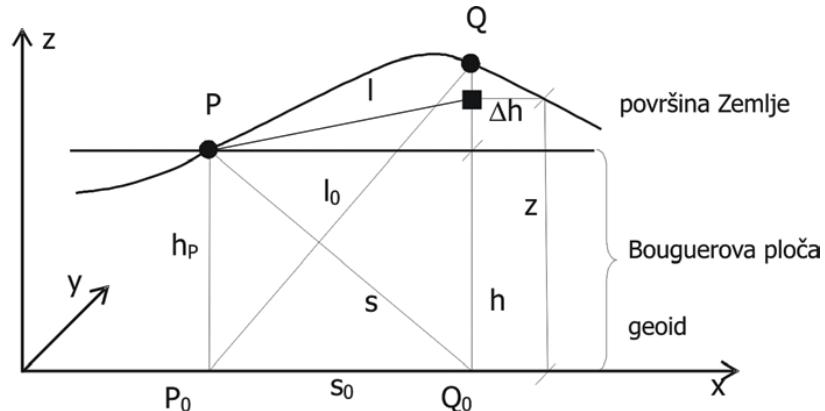
Uzeto test područje RH dimenzija je 90 km \* 76 km, definirano s y: 560100-5690000 m i x: 504500-5120000 m. Digitalni model reljefa (DMR) inkrementa 1 km (vidi sliku 3), dobiven je

kao ulazna datoteka s maksimalnom visinom od 816,000 m i minimalnom visinom od 94,000 m. U računanjima pretpostavlja se konstantna gustoća masa Zemljine kore od  $2120 \text{ kgm}^{-3}$ , uzeta kao digitalni model gustoća (DMG) inkrementa također 1 km.

Kao što je već spomenuto,

za računanje korekcije reljefa korišteni su modificirani fortranski programi TCSUMD za prostorno domenu i TCFF-TDP za spektralnu domenu.

Iz tablice 1 i slike 3 jasno je vidljiva međusobna podudarnost metoda prostorne i spektralne domene te korelacija s digitalnim modelom reljefa (najvećoj visini odgovara po iznosu najveća korekcija reljefa). Daljnja usporedba metoda bila bi izvediva



Slika 2: Ravninska reprezentacija korekcije za reljef (slika preuzeta iz Brkić i Bašić, 2000.)

upotreboom digitalnog modela reljefa manjih inkrementata (veća gustoća podataka). Magnituda promjene (engl. **Root Mean Square**, RMS) razlike NI i FFT metode iznosi  $\pm 0,031$  mGal, a pokazatelj raspršenosti (engl. **Standard Deviation**) iznosi  $\pm 0,029$  mGal.

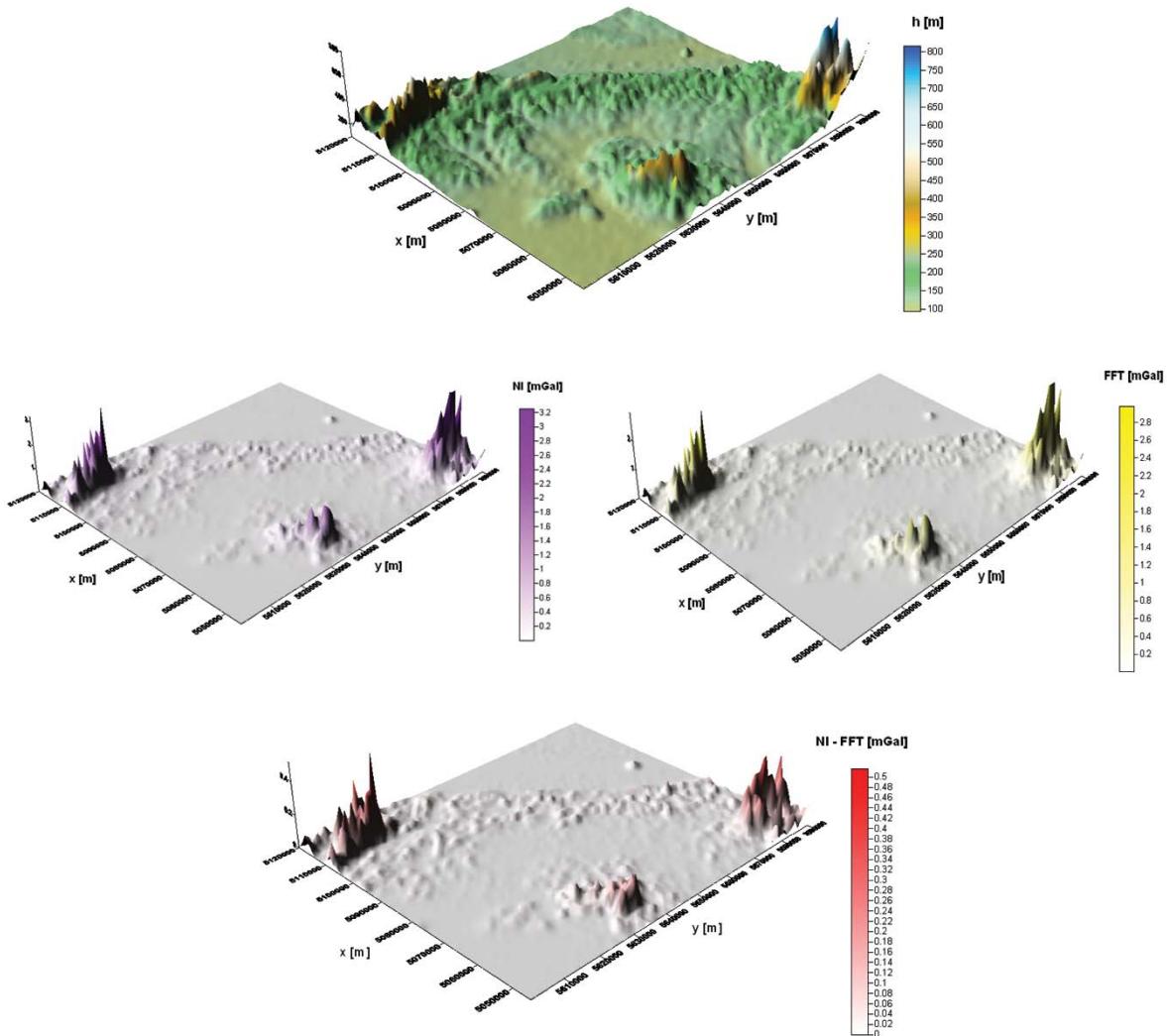
Osim same usporedbe dobivenih rezultata bilo je potrebno usporediti i vremena potrebna za računanje korekcije za reljef u prostornoj i spektralnoj domeni. Razvoj računalne tehnologije očituje se i u brzini izvođenja pojedinih matematičkih algoritama - u našem slučaju u brzini izvođenja NI

**Tablica 1:** Statistika korekcija za reljef metodama NI, FFT i razlike NI – FFT uz  $\rho = \text{const}$

$\delta g_R$ [mGal]	NI	FFT	NI - FFT
	$\Delta$ [km]	$\Delta$ [km]	$\Delta$ [km]
	$m\text{Gal} = 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$		
	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>
<b>maks.</b>	3,249	2,977	0,000
<b>min.</b>	0,001	0,001	0,516
<b>sred.</b>	0,084	0,074	0,010
<b>st.dev.</b>	$\pm 0,217$	$\pm 0,189$	$\pm 0,029$

metode. Iz tablice 2 vidljiva je zanemariva prednost računala 64-bitne generaci-

je (Turion64 MT30 1,6 GHz 1GB RAM) naspram računala 32-bitne generacije (Athlon



**Slika 3:** Digitalni model reljefa, korekcija za reljef metodama NI, FFT i razlike NI – FFT uz  $\rho = \text{const}$

**Tablica 2:** Usporedba vremena potrebnih za računanje korekcije reljefa NI i FFT metodom

Metoda	Athlon 1,2GHz 256MB RAM	Turion64 MT30 1,6 GHz 1GB RAM	Razlika
<b>NI</b>	10,20 min	7,80 min	2,4 min
<b>FFT</b>	0,013 min	0,0092 min	0,0038 min
<b>NI / FFT</b>	784,61	847,83	

1,2GHz 256MB RAM) u brzini izvođenja NI metode. Brzina izvođenja FFT metode je zanemariva.

*Jedna zanimljivost!* - izvođenje FFT metode je približno i do **800** puta brže u odnosu na NI metodu (kod računala 32-bitne generacije).

## 7. Zaključak

Cilj ovog zadatka bio je izračunati korekcije za reljef u spektralnoj domeni. Dobivene vrijednosti korekcije za reljef izračunate u spektralnoj domeni primjenom FFT-a, usporedili smo s podacima korekcije za reljef dobivene metodom NI u prostornoj domeni te ustanovili podudarnost dobivenih rezultata,

a samim time i podudarnost provedenih metoda. Izvođenjem metoda na računalu putem fortranskih programa uočena je znatna prednost u brzini algoritma spektralne domene naspram algoritma prostorne domene što je jedna od velikih prednosti spektralne domene pogotovo ako se radi o većem gridu podataka.

Standardna devijacija NI i FFT metoda kreće se oko 0,2 mGal što je zadovoljavajuće za provedeno istraživanje. Pri tome ulazne podatke za NI i FFT možemo smatrati osrednjim podacima visina i zemljinu topografiju reprezentiranu prizmama jer je DMR nastao interpolacijom izvornih točkastih podataka.

## Literatura

- Bašić, T: Skripta iz predmeta Fizikalna geodezija, Zagreb: Geodetski fakultet, 2004.
- Torge, W: Gravimetry. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1991.
- Brkić, M: Rukopis iz predmeta Spektralne metode, Zagreb: Geodetski fakultet, 2000.
- Brkić, M.; Bašić, T: Računanje korekcije reljefa u prostornoj i spektralnoj domeni. Geodetski list 54 (77), 4,259-273, Zagreb, 2000.
- URL1: [http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_integration](http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration) (22.11.2006.)
- URL2: [http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_method) (22.11.2006.)
- URL3: [http://www.geof.hr/~zhecimovic/PFG\\_Vjezbe/PFG%20-%203%20Auditorne%20-%20Utjecaj%20terena.pdf](http://www.geof.hr/~zhecimovic/PFG_Vjezbe/PFG%20-%203%20Auditorne%20-%20Utjecaj%20terena.pdf) (22.11.2006.) ■



**Ton-ing d.o.o.**

ISKOPI, POLAGANJE KABELA  
ELEKT. INSTALACIJE  
MONTAŽA RASVJETE  
ASFALTIRANJE I REZANJE ASFALTA  
IZGRADNJA OBJEKATA  
PRIJEVOZ KAMIONOM  
NISKOGRAĐNJA

Tomislav Gužvinec  
ing. geodezije

Milkovićeva 18, 42000 Varaždin  
tel.: 042 200 957, mob.: 098 9814 734

Dubrava K. Ža  
tel/fax: 042 739 060

PARCELACIJE  
SNIMANJE OBJEKATA  
ETAŽIRANJE  
ISKOLČENJA  
SVE VRSTE IZMJERE ZEMLJIŠTA  
I OBJEKATA