Originälle wissenschaftliche Arbeit
Angenommen am 21.12.2010.

TIBOR DÓSA

Äquidistant-, Eigen-Äquidistant- und Selbst-Äquidistant-Kurven in der euklidischen Ebene

Equidistant-, Own-Equidistant- and Self-Equidistant-Curves in the Euclidean Plane

ABSTRACT

There are given two curves in the plane. We are looking for the equidistant-curve of both in the following sense: what is the geometric locus of the centers of the circles that are tangent to both given curves? These points are in the same distance from the two given curves. The own-equidistant curve of a given curve is the locus of the centers of the circles that are twice tangent to the curve. The self-equidistant curve of a given curve is the envelope curve of the circles that are tangent to the curve and their centers lay on the curve too. The inverse problem is inspected too, curves c_1 and c_e are given. Which is the curve c_2 so that c_e is the equidistant-curve of c_1 and c_2? About these curves few is known [3], [4], [5], perhaps because one needs for their calculation an efficient computer algebra program. We have investigated only curves of polinomial equation with coefficients of integer numbers in the Euclidean plane. We have used the computer program Mathematica 5.2.

Key words: equidistant curve

MSC 2000: 14H50

Ekvidistantne, vlastito-ekvidistantne i svojstveno-ekvidistantne krivulje u euklidskoj ravnini

SAŽETAK

U ravnini su dane dvije krivulje. Tražimo krivulju koja je od njih jednako udaljena u sljedećem smislu: što je geometrijsko mjesto središta kružnica koje diraju obje dane krivulje? Te točke su jednako udaljene od dviju danih krivulja. Vlastito-ekvidistantna krivulja dane krivulje je geometrijsko mjesto središta onih kružnica koje danu krivulju dodiruju dva puta. Svojstveno-ekvidistantna krivulja dane krivulje je anvelopa kružnica koje diraju danu krivulju, a njihova središta također leže na toj krivulji. Također se proučava i obrnuti problem, dane su krivulje c_1 i c_e. Koja je krivulja c_2 tako da je c_e ekvidistantna krivulja za c_1 i c_2? O ovim krivuljama se malo zna, npr. [3], [4], [5], možda zbog toga što njihovo izračunavanje zahtijeva efikasni algebarski program. Proučavali smo samo krivulje čije su jednadžbe polinomi sa cjelobrojnim koeficijentima u euklidskoj ravnini. Koristili smo program Mathematica 5.2.

Ključne riječi: ekvidistantna krivulja

1 Äquidistant-Kurven

Zwischen zwei Staaten gibt es einen See. Wir suchen die Grenzlinie durch den See, die von beiden Ufern die gleiche Entfernung besitzt. Im allgemeinen, seien zwei ebene Kurven gegeben. Wir suchen den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kreise, die zu beiden Kurven tangent sind. Diese Kurve ist die Äquidistant-Kurve der beiden anderen, weil deren Punkte gleich weit von den beiden entfernt sind.

Sei $G(x_0,y_0,d)$ die Distanz-Funktion einer Kurve, dass heisst $G(x_0,y_0,d) = 0$, wenn der Punkt (x_0,y_0) von der Kurve in einer Distanz von d liegt. $G(x_0,y_0,d)$ ist eigentlich die Gleichung der Parallelkurve der Kurve mit Distanz d. Wir können die Funktion G einer Kurve C wie folgt bestimmen. Wenn die Kurve C nur aus dem Punkt $P(x,y)$ besteht, dann gilt:

$$G(x_0,y_0,d) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-d^2 = 0.$$

Sei das Polynom $F(x,y) = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten die Gleichung der Kurve C. Die Gleichung des Kreises um den Punkt (x_0,y_0) ist: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-d^2 = 0$. Wenn wir aus diesen beiden Gleichungen y elimieren, erhalten wir eine Gleichung $H(x,x_0,y_0,d) = 0$. Der entsprechende Mathematica Befehl ist:

$$H = Resultant[F(x,y),(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-d^2,y].$$

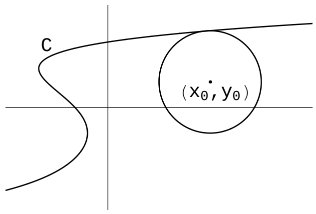

Abbildung 1

Weil der Kreis tangent zur Kurve C ist (Abb. 1), und der tangente Punkt als doppelter Schnittpunkt gilt, ist x eine doppelte Wurzel der Gleichung $H = 0$. Daraus folgt, dass x auch eine Wurzel der Gleichung $\partial H/\partial d = 0$ ist. Wenn aus diesen beiden Gleichungen x eliminiert wird, erhalten wir die Distanz-Funktion der Kurve C. Wenn zum Beispiel C eine Parabel ist, dann:

$$F(x,y) = y - x^2 = 0$$

$$H = (x - x_0)^2 + (x^2 - y_0)^2 - d^2$$

$$G(x_0, y_0, d) =$$

$$16(d^2 - x_0^2 + y_0)^3 - (x_0^2 - y_0)^2(1+4y_0)^2 + 8d^4(1 - 10y_0 - 2y_0^2)$$

$$+ d^2(1+4y_0)(1 - 12y_0 + 8y_0^2 + 4x_0^2(5+2y_0)) = 0$$

für alle Punkte (x_0, y_0) der Ebene.

Seien C_1, C_2 zwei Kurven und G_1, G_2 ihre Distanz-Funktion. Wenn wir aus den letzteren d eliminieren, erhalten wir die Gleichung der zu C_1 und C_2 gehörenden Äquidistant-Kurve. Es ist trivial, dass:

- die Äquidistant-Kurve von zwei Punkten die Streckenhalbierende ist;
- die Äquidistant-Kurve einer Linie und eines Punktes, der nicht auf der Linie liegt eine Parabel ist;
- die Äquidistant-Kurve eines schneidenden Geradenpaares die Winkelhalbierende ist;
- die Äquidistant-Kurven von zwei Kreisen Kegelschnitte sind.

Bei den folgenden Bildern sind die Grundkurven (C_1, C_2 oder C_1, P_1) grün, die Äquidistant-Kurven rot, die Tangent-Kreise blau. Der Einfachheit halber sind die trivialen Äquidistant-Punkte an den Achsen weggelassen.

1. Die Äquidistant-Kurve der Kardioide und des Nullpunktes ist ein Kreis, vgl. Abb. 2.

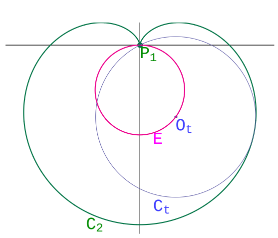

Abbildung 2

2. Die Äquidistant-Kurve der Lemniskate und des Nullpunktes ist eine Hyperbel, vgl. Abb. 3.

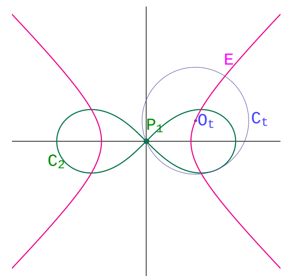

Abbildung 3

3. Die Äquidistant-Kurve der Konchoide $(x^2 + y^2)(y - 1)^2 = y^2$ und des Nullpunktes besteht aus zwei Kurven. Diese sind die Parallelkurven der Parabel (gelb) $y = -1/2x^2 + 1/2$ mit Abstand $\pm 1/2$. Ihre Gleichung lautet: $16x^6 + 4x^4(-11 + 16y + 4y^2) + x^2(-1 - 60y + 24y^2 + 64y^3) + y(y-1)(1+8y)^2 = 0$, vgl. Abb. 4.

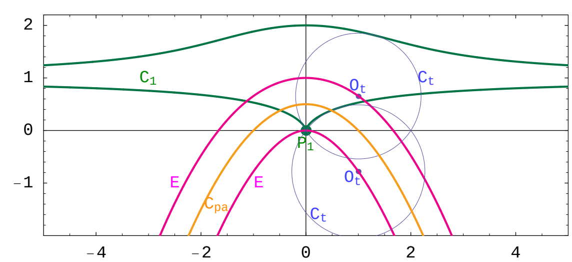

Abbildung 4

4. Die Äquidistant-Kurve des Zweiblattes $(x^2 + (y + 1/2)^2)^2 = 4(y + 1/2)x^2$ und seines Knotenpunktes $(0, -1/2)$ hat eine dreifache Symmetrie, ihre Gleichung ist: $16(x^2 + y^2)^2 + 24x^2(3 + 8y) + 8y^2(9 - 8y) - 27 = 0$, vgl. Abb. 5.

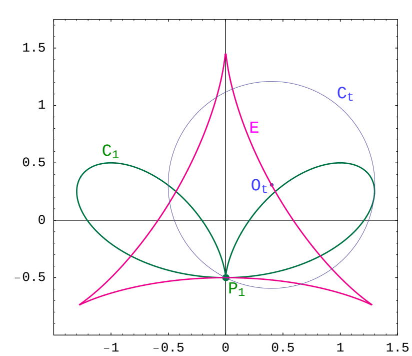

Abbildung 5

5. Die Äquidistant-Kurve der Ellipse $x^2+4y^2=4$ und der Linie $y=-1$ hat die Gleichung $x^6+x^4(-10+8y+14y^2)+x^2(9-132y-194y^2-68y^3+y^4)+108y-72y^3+32y^4-4y^5=0$, vgl. Abb. 6.

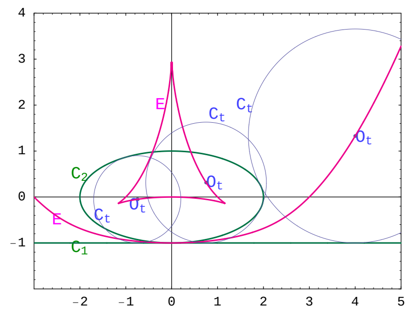

Abbildung 6

2 Eigen-Äquidistant-Kurven

Die Eigen-Äquidistant-Kurve einer gegebenen Kurve C ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, die zweimal zu C tangent sind. Sei $G(x,y,d)$ die Distanz-Funktion der Kurve C. Wenn für einen Punkt $P(x,y)$ d doppelte Wurzel von G ist, dann ist der Kreis um P mit Radius d zweimal tangent zu C, das heisst, P ist ein Punkt der Eigen-Äquidistant-Kurve. Wenn d die zweifache Wurzel von G ist, dann ist d auch eine Wurzel von $\partial H/\partial d=0$. Wenn wir d aus den beiden Gleichungen eliminieren, erhalten wir die Gleichung der Eigen-Äquidistant-Kurve. Der entsprechende Mathematica Befehl ist:

$Q = Resultant[G(x,y,d), D[G(x,y,d),d],d]$

Die Funktion $Q(x,y)$ besteht meistens aus mehreren Faktoren, relevant sind der von der Eigen-Äquidistant-Kurve und der von der Evolute. Die Evolute kann auch als degenerierte Eigen-Äquidistant-Kurve betrachtet werden, weil der Berührungspunkt des Krümmungskreises doppelt zählt.

1. Es ist bekannt, dass die Eigen-Äquidistant-Kurve der Strophoide $x^2(1+y)=y^2(1-y)$ die Parabel $y=1/4\,x^2$, sowie eine Halbgerade ist. Der Punkt P ist das Zentrum der maximalen Krümmung, vgl. Abb. 7.

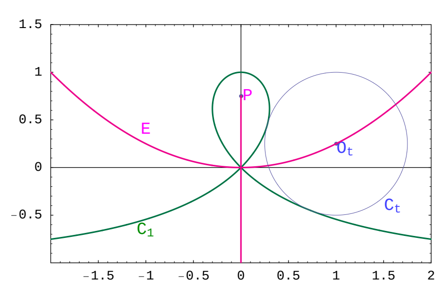

Abbildung 7

2. Die Eigen-Äquidistant-Kurve der Agnesi-Kurve $y(1+x^2)=1$. Auf dem oben gezeigten Weg erhalten wir die implizite Gleichung der Evolute

$$11664x^8+x^6(48931-276y-15168y^2+7024y^3+96y^4-1536y^5+1024y^6)-12x^4(-6687+20367y+3718y^2-1908y^3-106y^4+524y^5-276y^6-44y^7+36y^8)-24x^2(-17253+7830y+2160y^2-13230y^3+5392y^4+600y^5-1424y^6+768y^7+64y^8)+16(-1+2y)^3(27+8y^3)^2=0,$$

und der Eigen-Äquidistant-Kurve

$$1048576x^{10}+16x^8(225333-208416y-86272y^2-38912y^3+8192y^4)+16x^6(288225-704106y+215010y^2+221768y^3+71872y^4+66016y^5-16192y^6-384y^7+256y^8)-8x^4(-257337+1462860y-2120256y^2+1203336y^3-110394y^4+151968y^5+214400y^6+32640y^7-18688y^8-512y^9+1024y^{10})+8x^2(-52488-400221y+1293975y^2-1900260y^3+2035854y^4-1343412y^5+901080y^6-377712y^7+202880y^8-27200y^9-2688y^{10}+1280y^{11}+512y^{12})-(5-4y+4y^2)^2(27+8y^3)^3=0.$$

Die gelbe Kurve ist die Evolute, die Punkte P sind ihre Spitzen. Die rote Kurve ist die Eigen-Äquidistant-Kurve, aber nur die Punkte von den beiden Punkten P nach oben sind äquidistant, vgl. Abb. 8.

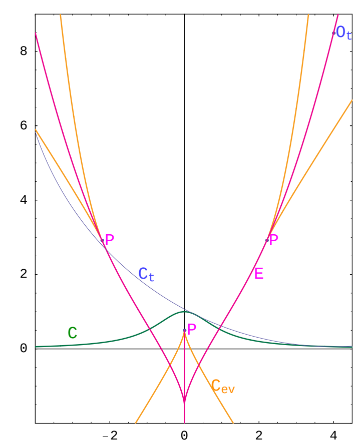

Abbildung 8

3. Nehmen wir die Lissajous-Kurve $x=\cos t$, $y=\sin 2t$. Ihre implicite Gleichung lautet $y^2=4x^2(1-x^2)$. Die gelbe Kurve ist die Evolute, vgl. Abb. 9. Triviale Äquidistant-Punkte sind die y-Achse und die Strecke $(-3,3)$ auf der x-Achse. Überraschenderweise gibt es eine sternförmige Kurve in der Mitte. Die Punkte ausserhalb von den Punkten P sind keine Eigen-Äquidistant-Punkte. Die Punkte P sind die Zentren der maximalen Krümmungen. Die Gleichung der roten Kurve ist $-68719476736y^{20}+<<56\,\text{Terme}>>$ $+42845606719488x^{16}=0$, vgl. Abb. 10.

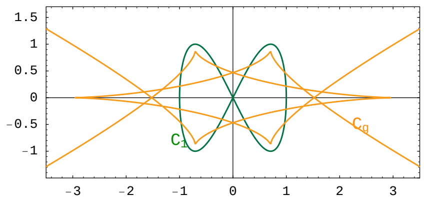

Abbildung 9

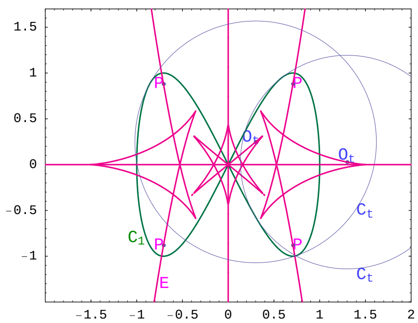

Abbildung 10

4. Die Eigen-Äquidistant-Kurve der einfachen Lamesche-Kurve $y^4 + x^4 = 1$ bildet eine schöne sternförmige Kurve. Ihre Gleichung lautet $1073741824(x^{88} + y^{88}) + <<$ 527 Terme $>> = 0$, vgl.Abb. 11.

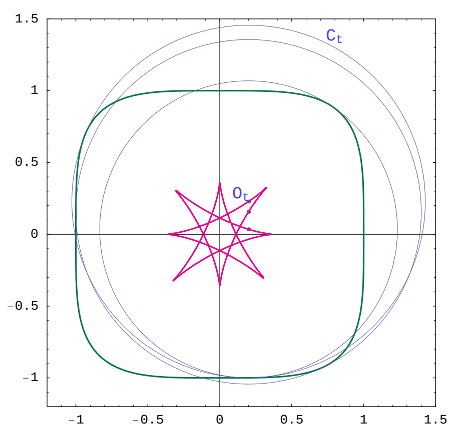

Abbildung 11

5. Nehmen wir noch die Lissajous-Kurve: $x = \sin 2t + 1/4 \cos 3t$, $y = -\cos 2t - 1/4 \sin 3t$. Ihre Eigen-Äquidistant-Kurve sieht noch dekorativer aus, die entsprechende Gleichung ist $78732x^{46} + <<$ 568 Terme $>> + (246037500 + 1968300x^2)y^{44} = 0$, vgl. Abb. 12.

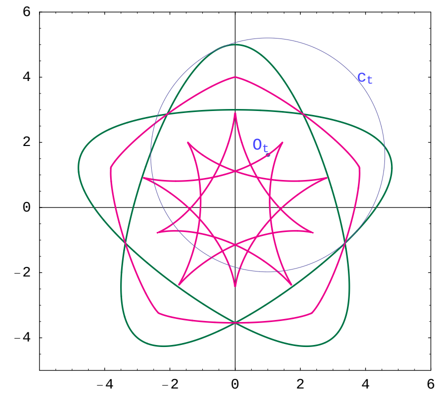

Abbildung 12

3 Selbst-Äquidistant-Kurven

Die Selbst-Äquidistant-Kurve einer Kurve C ist die Hüllkurve der Kreise, die tangent zu C sind und deren Mittelpunkte auf der Kurve C liegen. Sei F(x,y)=0 die Gleichung der Kurve C und $G(x_0, y_0, d)$ ihre Distanz-Funktion.

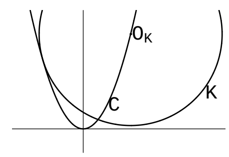

Abbildung 13

Die Gleichung des Kreises K ist $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$ wobei $F(x_0, y_0) = 0$. Diese zwei Gleichungen definieren eine Kreisschar. Ihre Hüllkurve erhalten wir so:

- zuerst eliminieren wir d aus K und G, wir erhalten $H(x, y, x_0, y_0)$;
- dann eliminieren wir x_0 aus H und F, wir erhalten $J(x, y, y_0)$;
- schliesslich eliminieren wir y_0 aus J und $\partial J / \partial y_0$.

1. Die Selbst-Äquidistant-Kurve der Parabel $y = x^2$ hat die folgende Gleichung $x^4(1 + 2y) + 2x^2(1 + y)(-5 - 10y + y^2) - 2(1 + 2y + 3y^2)^2 = 0$, vgl. Abb. 14.

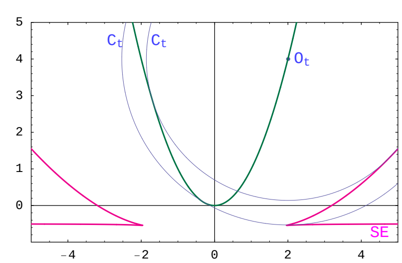

Abbildung 14

2. Zu der Ellipse $(x/2)^2 + y^2 = 1$ gehörende Selbst-Äquidistant-Kurve hat die folgende Gleichung $196y^{10} + y^8(-6132 + 953x^2) + 4y^6(9738 - 7179x^2 + 463x^4) + 2y^4(139212 + 109719x^2 - 24354x^4 + 899x^6) + 4y^2(-424683 - 176175x^2 + 86013x^4 - 8949x^6 + 218x^8) + (-36 + x^2)(441 - 138x^2 + 13x^4)^2 = 0$, vgl. Abb. 15.

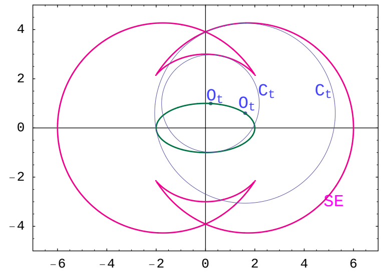

Abbildung 15

3. Die Selbst-Äquidistant-Kurve der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ hat die folgende Gleichung $16y^{10} + 16y^8(7 + 3x^2) + 8y^6(-31 - 8x^2 + 4x^4) - 8y^4(-42 + 159x^2 + 44x^4 + 4x^6) - y^2(207 + 8x^2(-100 - 159x^2 + 8x^4 + 6x^6)) + (9 - x^2)(3 + 4x^2(1 + x^2))^2 = 0$, vgl. Abb. 16.

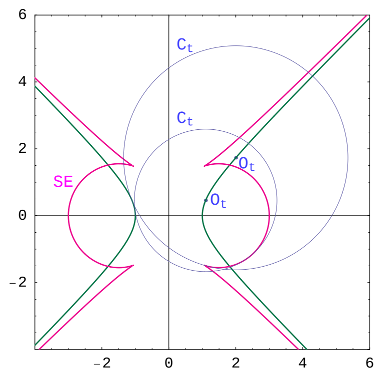

Abbildung 16

4. Die Gleichung der Selbst-Äquidistant-Kurve der Strophoide ist $4x^{30} + << 248 \text{ Terme} >> + 4y^{30} = 0$, vgl. Abb. 17.

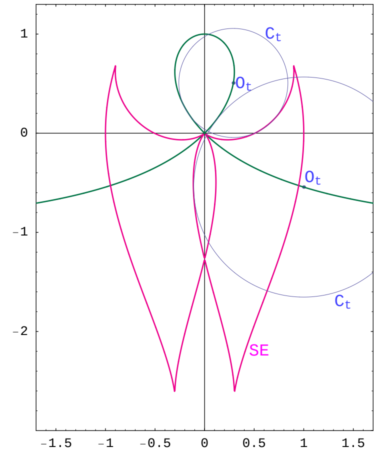

Abbildung 17

4 Inverse und offene Probleme

Gegeben sind zwei Kurven C_0 und C_e. Wir suchen die Kurve C_2, dass C_e die Äquidistant-Kurve von C_1 und C_2 ist. C_2 ist einfach die Hüllkurve der Kreise, die tangent zu C_1 sind, und ihre Mittelpunkte auf C_e liegen.

1. Sei C_1 die Linie der x-Achse und C_e der Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

Die Gleichung der obigen Kreise lautet:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - y_0^2 = 0.$ (EK)

Ihre Mittelpunkte liegen auf C_e:

$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0.$ (EE)

Zuerst eliminieren wir x_0 aus EK und EE:

$R1 = Resultant[\text{ EK, EE}, x_0]$,

dann y_0 aus $\partial R1/\partial y_0$:

$R2 = Resultant[R1, D[R1, y_0], y_0]$.

Wir erhalten so die Gleichung der Kurve C_2, sie ist die Nephroide $4(x^2 + y^2 - 1)^3 = 27y^2$, vgl. Abb. 18.

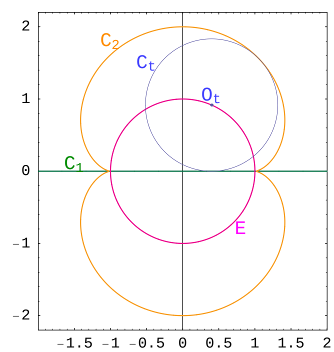

Abbildung 18

2. Sei C_1 die Konchoide $(x_0^2+y_0^2)(y_0-1)^2 = y_0^2$ und C_e der Punkt $P_1(0,1)$. Wir suchen die Hüllkurve der Kreise $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = x_0^2+(y_0-1)^2$. Eliminierend x_0, y_0, erhalten wir:

$$x^{10}+x^8(7-12y+5y^2)+2x^6(297-104y+42y^2-24y^3+5y^4)+2x^4(-61-492y+783y^2-304y^3+105y^4-36y^5+5y^6)+x^2(-1+y)^3(355+345y-242y^2+82y^3-33y^4+5y^5)+(-3+y)(-1+y)^9=0$$

Die Konchoide ist die Äquidistant-Kurve der gelben Kurve und des Punktes P_1, vgl. Abb. 19.

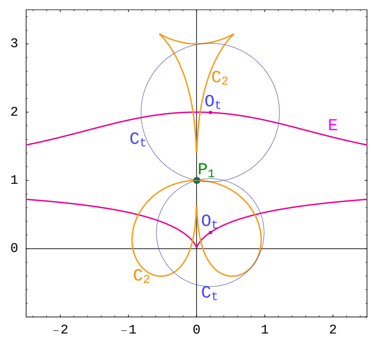

Abbildung 19

3. Wie wir schon gesehen haben, ist die Parabel die Eigen-Äquidistant-Kurve der Strophoide. Es gibt aber undendlich viele Kurven, deren Eigen-Äquidistant-Kurve auch einen Parabel-Bogen besitzt. Nehmen wir die folgende Kurve dritten Grades (grün) $8y^3+8y(x^2-1)+(2x-1)^2=0$. Wie die blauen Kreise zeigen, sind die Punkte der Parabel $y=x^2$ äquidistant, vgl. Abb. 20.

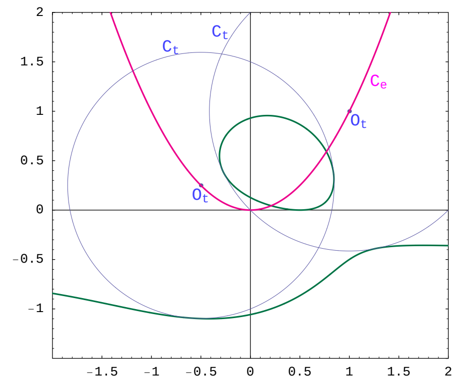

Abbildung 20

4. Die Frage der Anti-Selbst-Äquidistant-Kurve bleibt offen. Z.B. welche Kurve hat die Parabel als Selbst-Äquidistant-Kurve? Gibt es Kurven C_1, C_2 so, dass C_2 die Selbst-Äquidistant-Kurve von C_1 ist und C_1 die Selbst-Äquidistant-Kurve von C_2 ist?

Literatur

[1] do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[2] Gray, A., *Differentialgeometrie*. Spektrum, 1994.

[3] Dingeldey, H., *Die einfachsten Metridistanten*. Radebeul, 1914.

[4] Loria, G., *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurve*. Teubner, Leipzig 1902., Seite: 711

[5] Schmidt, H., *Ausgewählte höhere Kurven*. Wiesbaden, 1949.

Tibor Dósa
Pi Software
Simon 3, 8300 Tapolca, Hungary
e-mail: dosa.tibor@t-online.de