

UDK 528.235.1:528.91:512.62:004.42(497.5)

Izvorni znanstveni članak

Konformne projekcije za Hrvatsku s najmanjim apsolutnim linearnim deformacijama

Dražen TUTIĆ¹ – Zagreb

SAŽETAK. U radu je dan usporedni prikaz postojećih konformnih projekcija za Hrvatsku te nove optimalne konformne projekcije po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. U Hrvatskoj su se do sada upotrebljavale, a i ubuduće će se upotrebljavati, Gauss-Krügerova i Lambertova konformna konusna projekcija za potrebe službene kartografije. Prikazan su raspored i veličina deformacija u nekim postojećim varijantama tih projekcija te je dana ocjena najvećih apsolutnih linearnih deformacija. Dane su optimalne varijante tih dviju projekcija. Zatim je istražena primjena stereografske projekcije na područje Hrvatske, što do sada nije istraživalo. Pokazuje se da Gauss-Krügerova i Lambertova konformna konusna projekcija daju približno jednake najveće apsolutne linearne deformacije. Stereografska je projekcija u tom smislu povoljnija. Osim tih standardnih konformnih projekcija istražene su i tzv. adaptabilne konformne projekcije izražene polinomima drugoga do desetog stupnja. Pokazuje se da adaptabilne konformne projekcije postižu znatno manje vrijednosti najvećih apsolutnih linearnih deformacija, što je posljedica nepravilnog oblika područja. Tako je kopneno područje Hrvatske već polinomima šestog stupnja moguće preslikati s najvećom apsolutnom linearnom deformacijom od 1 dm/km. Pod područjem Hrvatske općenito se razmatra državni teritorij i epikontinentalni morski pojas, a iznimno se razmatra i samo kopneno područje Hrvatske. Optimalne varijante nađene su numeričkim postupcima primjenom programskog paketa MATLAB.

Ključne riječi: konformne projekcije, kartografske projekcije za Hrvatsku, najmanje apsolutne linearne deformacije.

1. Uvod

Konformne kartografske projekcije osobito su važne zbog primjene za potrebe državnih izmjera, topografsko i katastarsko kartiranje, navigaciju u pomorstvu i zrakoplovstvu te vojne potrebe. Tako raširena primjena ponajprije je proizašla iz činjenice da u konformnim projekcijama linearno mjerilo u nekoj točki ne ovisi o

¹ Doc. dr. sc. Dražen Tutić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, e-mail: dtutic@geof.hr.

azimutu za razliku od svih nekonformnih kartografskih projekcija u kojima linearno mjerilo osim o položaju točke, ovisi i o promatranom smjeru (azimutu) u nekoj točki. U tom smislu analiza linearnih deformacija u konformnim projekcijama jednostavnija je od svih ostalih nekonformnih projekcija.

Hrvatska i zemlje kojih je Hrvatska bila sastavnica upotrebljavale su, a i danas upotrebljavaju, nekoliko konformnih projekcija. To je u prvom redu Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, projekcija koja je izabrana već 1924. godine za područje tadašnje Kraljevine SHS, a nakon II. svjetskog rata i u cijelosti primjenjena za službenu kartografiju tadašnje Jugoslavije. Nakon osamostaljenja 1991. godine Hrvatska je nastavila službenu upotrebu te projekcije, odnosno dviju zapadnih zona. Studijom (Lapaine 2000) predložena, a zakonodavnim aktom (NN 2004a, 2004b) prihvaćena, od 2010. godine službena je poprečna Mercatorova (Gauss-Krügerova) projekcija s jednim koordinatnim sustavom. Druga konformna projekcija koja se upotrebljava za službenu kartografiju Lambertova je konformna konusna projekcija. Ona se upotrebljava za potrebe pregledne službene kartografije (mjerila sitnija od 1:500 000), zrakoplovne navigacije i za vojne pregledne karte. Uspravna cilindrična konformna ili Mercatorova projekcija upotrebljava se za pomorske karte Jadranskoga mora. Upotreba projekcijskog sustava UTM predviđena je u vojsci, kao dio usklađivanja sa standardima NATO-a.

2. Pregled dosadašnjih radova

Kad se općenito govori o konformnom preslikavanju u kartografskim projekcijama, nezaobilazno je spomenuti J. H. Lamberta (1772), koji na suvremen, analitički način postavlja i rješava zadatak preslikavanja sfere i rotacijskog elipsoida u ravninu. Prije Lambertovih radova, poznate konformne projekcije bile su uspravna konformna cilindrična projekcija sfere (Mercatorova projekcija) i stereografska projekcija sfere. Lambert na temelju diferencijalnih jednadžbi preslikavanja jedne plohe na drugu pronalazi veći broj kartografskih projekcija, ali, kako je i sam Lambert napisao, rješavanje općenito postavljenog zadatka vodi do beskonačnog broja različitih projekcija. C. F. Gauss (1828) daje opće rješenje konformnog preslikavanja bilo koje plohe na bilo koju drugu plohu.

Slijedi prikaz istraživanja konformnih projekcija za područje Hrvatske i zemalja kojih je Hrvatska bila dio. U prvom broju *Glasila geometara Kraljevstva Srba, Hrvata i Slovenaca* iz 1919., što ga je izdalo tada osnovano *Društvo Geometara Kraljevine SHS*, u prvom članku V. Filkuka, profesor na Geodetskom tečaju u Zagrebu, objavljuje članak u nastavcima *Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji* (Filkuka 1919a). Opisuje konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu po Gaussu i dvije tada upotrebljavane projekcije za potrebe izmjera: stereografsku projekciju sfere i projekciju sfere na valjak (cilindrična projekcija). Kako se vidi, a i sam autor tvrdi, u to se doba pogodnim smatralo dvostruko preslikavanje, najprije elipsoida na sferu, na kojoj su se izvodila izjednačenja triangulacijske mreže, pa sfere u ravninu u kojoj je izvedena detaljna izmjera.

U *Glasilu geometara* br. 4, 5 i 6, str. 69–72., u *Zapisniku Odborske sjednice obdržavane dne 22. lipnja 1919. u Zagrebu* stoji da Filkuka (1919b) iznosi prijedlog za rješenje nekih pitanja koja se mogu prihvatiti i prije nego li tek osnovano

Društvo geometara Kraljevine SHS prihvati organizaciju ukupnoga geodetskog rada. U tom prijedlogu pod točkom Ia. stoji: “*Za projekciju zemaljske izmjere ima se upotrijebiti konformna projekcija na valjak sa širinom pojasa od jedan i pol stupnja na zapad i istok od osi X. Pripravne radnje za ovu projekciju imao bi obaviti vojni triangularni ured*”. Filkuka zapravo predlaže uvođenje Gauss-Krügerove projekcije meridijanskih zona.

Posljednje poglavlje smjernica “Osnovni geodetski radovi u F.N.R. Jugoslaviji” (SGU 1953, str. 193–255), posvećeno je tijekom rasprave i donošenja odluke o izboru projekcije koje je započelo 1921. godine, a konačna je odluka donesena 1924. U tom poglavlju citirani su brojni arhivski dokumenti i članci iz toga doba. Tu su sadržani i dijelovi referata, rasprava i članaka A. Faschinga o pitanju izbora projekcije. A. Fasching je u to doba bio suradnik Generalne direkcije katastra Kraljevine SHS i poznata su njegova zauzimanja za upotrebu stereografske projekcije za topografsku izmjeru (SGU 1953). Na kraju poglavlja dan je nacrt rješenja ministara financija od 17. 11. 1924. u kojem se propisuje uvođenje Gauss-Krügerove projekcije kao službene projekcije. Projekcija je zadana s tri koordinatna sustava, srednji meridijani 15° , 18° i 21° , upotrebljava se Besselov elipsoid, greenwichki početni meridijan, a ravninske se koordinate zapisuju po prijedlogu Baumgartena, odnosno apscise se mjere od ekvatora, a ordinatama se dodaje konstanta 500 000.

U *Geometarskom glasniku* iz 1928. i 1929. objavljen je niz članaka pod naslovom *Projekcija novog katastarskog premera u Kraljevini SHS* (Abakumov i dr. 1928, 1929). Niz započinje kratkim uvodom o nužnosti kartografskih projekcija i zahtjevima koji se u vezi s njima postavljaju u katastru. Posebno se ističe zahtjev da se računanje površina na planovima i obrada geodetskih mjerenja u detaljnoj izmjeri može izvesti bez vođenja računa o deformacijama projekcije. Daje se izvod osnovnih jednadžbi Gauss-Krügerove projekcije, ispitivanje slike triangulacijske stranice (geodetske linije), konvergencija meridijana i linearno mjerilo. To nije kraj niza, ali u sljedećim brojevima *Geometarskog glasnika* niz se nije nastavio objavljivati.

U časopisu *Hrvatska državna izmjera*, službenoga glasnika *Odsjeka za Državnu izmjeru* Nezavisne Države Hrvatske, broj 5 iz 1942. godine, objavljen je članak N. Abakumova pod naslovom *Gauss-Krügerova projekcija u primjeni na područje Nezavisne Države Hrvatske* (Abakumov 1942). U toj kratkoj raspravi autor postavlja pitanje projekcije za teritorij tadašnje države koji se u smjeru istok-zapad protezao od otprilike $14^\circ 30'$ do $20^\circ 30'$. Autor razmatra postojeću varijantu Gauss-Krügerove projekcije s 3 zone i srednjim meridijanima na 15° , 18° i 21° i zaključuje da su za promatrano područje potrebne sve tri zone. Razmatra rješenje da se manji dio pripada najistočnijoj zoni prikazuje u srednjoj zoni uz upotrebu zasebnoga linearnog modula kako bi se deformacije svele na dopuštene. Zatim daje mogućnost da se izaberu dvije zone sa srednjim meridijanima na 16° i 19° , ali smatra to lošim rješenjem zbog odustajanja od prihvaćene podjele u drugim državama. Na kraju nešto detaljnije razmatra jednu zonu širine 6° sa srednjim meridijanom na $17^\circ 25,9'$. Naglašava potrebu uvođenja nekoliko linearnih modula kako bi se deformacije održale ispod 0,0001.

Lapaine (2000) u studiji *Prijedlog službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske* daje pregled povijesnih istraživanja kartografskih projekcija u svijetu i u Hrvatskoj. Poseban pregled bavi se projekcijama koje se upotrebljavaju u zrako-

plovstvu, pomorstvu, vojsci, državnoj izmjeri u Hrvatskoj, ali i drugim europskim zemljama. U posebnom poglavlju autor istražuje i predlaže izbor projekcije za topografske, pomorske, zrakoplovne i vojne karte. Za topografske karte Lapaine ispituje postojeću Gauss-Krügerovu projekciju u dvije zone, zatim tu projekciju u jednom koordinatnom sustavu sa srednjim meridijanom na $16^{\circ}30'$ i tri varijante linearnog mjerila od 0,9999, 0,9997 i 0,9996 te UTM projekciju koja također obuhvaća Hrvatsku u dvije zone. Zatim istražuje Lambertovu konformnu konusnu projekciju u jednoj i dvije zone. Konačno za potrebe topografske i katastarske izmjere i kartiranje, zrakoplovne karte u mjerima krupnijima od 1:300 000 i pomorske karte u mjerilima krupnijim od 1:50 000 predlaže jedan koordinatni sustav Gauss-Krügerove projekcije sa srednjim meridijanom na $16^{\circ}30'$ i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu 0,9999. Alternativni prijedlog koji osigurava deformacije manje od 0,0001 je Lambertova konformna konusna projekcija u dvije zone. Za vojnu kartografiju predlaže UTM, a Lambertovu konformnu konusnu sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^{\circ}05'$ i $\varphi_2 = 45^{\circ}55'$ za topografske, zrakoplovne i vojne karte mjerila 1:500 000 i sitnija.

U Narodnim novinama (2004a, 2004b) definiraju se novi službeni projekcijski koordinatni sustavi. U tom zakonskom aktu prihvaćene su projekcije predložene u studiji Lapainea (2000), i to poprečna Mercatorova (Gauss-Krügerova) projekcija sa srednjim meridijanom $16^{\circ}30'$ i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu od 0,9999 te Lambertova konformna konusna projekcija sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^{\circ}05'$ i $\varphi_2 = 45^{\circ}55'$. Za vojne potrebe propisuje se projekcijski sustav UTM. Za novi geodetski datum utvrđuje se ETRS89 s elipsoidom GRS80. Prelazak na nove projekcije predviđen je do 2010. godine.

Lapaine (2006), i u skraćenom obliku Lapaine i Tutić (2007), daju formule za računanja u novoj kartografskoj projekciji za Hrvatsku, odnosno novoj poprečnoj Mercatorovoj projekciji. Sve formule izvedene su uz zahtjev da je osigurana točnost rezultata na 15 značajnih znamenki. Daju se i primjeri upotrebe nove projekcije u katastru.

Rajaković (2007) istražuje uspravne konusne projekcije, i to konformnu, ekvivalentnu i ekvidistantnu s primjenom na područje Hrvatske. Daje rezultate različitih varijanti, posebno za područje Hrvatske s epikontinentalnim morskim pojasom i bez njega. U tom radu prvi se put pod područjem Hrvatske razmatra i epikontinentalni pojas. Rajaković (2008) istražuje najbolju konformnu konusnu projekciju za Hrvatsku uključujući i epikontinentalni morski pojas. Daje 8 različitih varijanti, a novost je da je jedna od njih izvedena na temelju minimuma Airy/Jordanova kriterija za područje elipsoidnog trapeza koji opisuju područje Hrvatske. Upotreba toga kriterija za izbor projekcije za Hrvatsku se tada prvi put susreće u literaturi. U tom radu utvrđuju se i koordinate najjužnije točke Hrvatske na temelju važećih sporazuma. Kao najbolju uspravnu konformnu projekciju Rajaković predlaže varijantu sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 42^{\circ}20'$ i $\varphi_2 = 45^{\circ}50'$.

Tutić i Lapaine (2008) istražuju stereografsku projekciju s primjenom na područje Hrvatske. To je prvi rad koji se bavi stereografskom projekcijom za Hrvatsku. Za područje je uzet državni teritorij (kopno i teritorijalne vode), a kao kriterij za izbor parametara upotrebljavaju Airy/Jordanov kriterij. Novost u tom radu je da je taj kriterij izračunan za različite aproksimacije područja Hrvatske

elipsoidnim trapezima. Rješenje je nađeno numeričkim postupkom primjenom računala.

Kako se vidi, istraživanja konformnih projekcija za područje Hrvatske (i zemalja kojih je Hrvatska bila sastavni dio) uglavnom se odnose na primjenu za potrebe izmjere i službene kartografije. Iznimka su radovi novijeg datuma (Rajaković 2007, Rajaković 2008, Tutić i Lapaine 2008), gdje se konformne projekcije istražuju na temelju drugačijih kriterija.

3. Metodologija

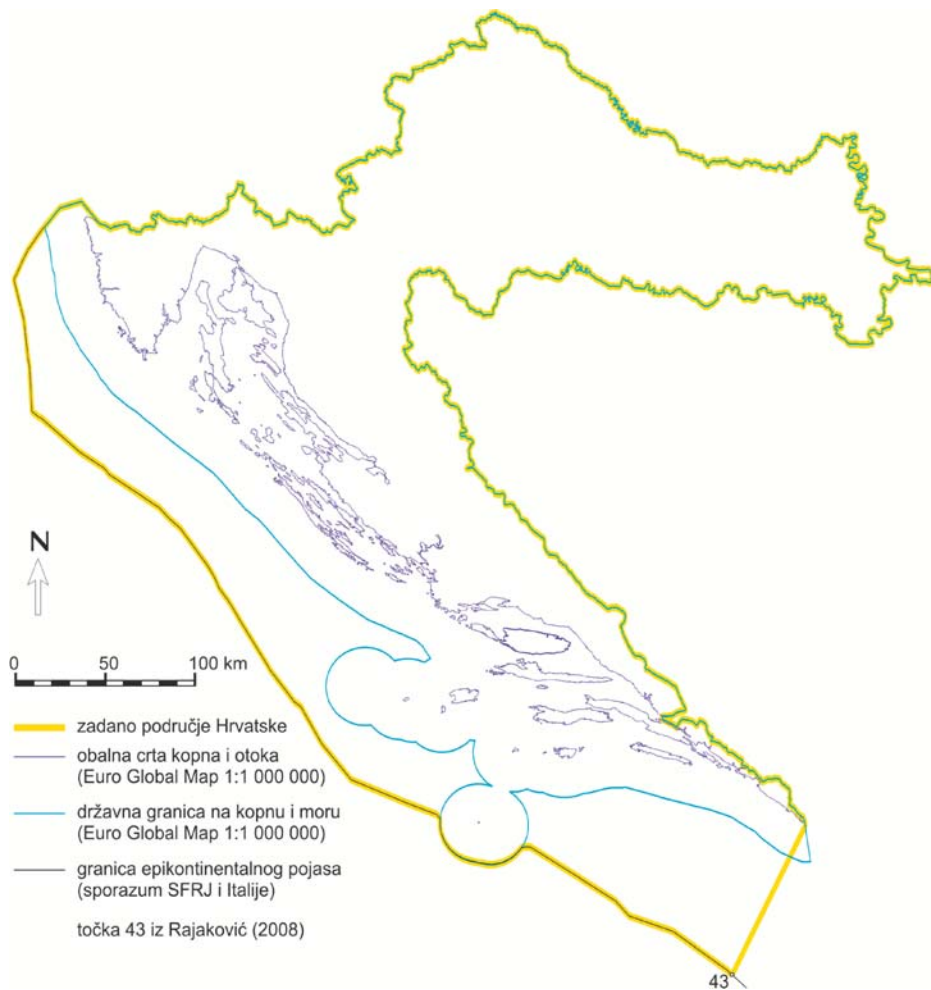
Kako bi bilo moguće usporediti različite projekcije i njihove varijante, mora se primijeniti jedinstvena metodologija i kriteriji. To se u prvom redu odnosi na jedinstveni kriterij za ocjenu deformacija i jedinstveno geografsko područje. Nove optimalne projekcije dobivene su na temelju postavljenoga kriterija najmanjih najvećih apsolutnih linearnih deformacija za zadano područje. Postojeće varijante konformnih projekcija nisu dobivene na temelju istih uvjeta kao i optimalne pa ih se ni ne može na taj način uspoređivati. Ocjena najveće apsolutne linearne deformacije za postojeće projekcije dana je radi potpunijeg pregleda konformnih projekcija za Hrvatsku.

3.1. Područje Hrvatske

Za potrebe nalaženja optimalnih kartografskih projekcija nije nužno imati vrlo točne podatke o granici područja. Izbor kartografske projekcije za neko područje ne ovisi u znatnoj mjeri o točnosti koordinata granice toga područja, već ponajprije o obliku i veličini toga područja. Podaci za definiciju državnog područja preuzeti su iz karte Euro Global Map 1:1 000 000 za Hrvatsku što ju izdaje Državna geodetska uprava (URL 2). Podaci o granici epikontinentalnog pojasa preuzeti su iz Službenog lista SFRJ (1970). Koordinate za točku broj 43 granice epikontinentalnog pojasa umjesto iz tog sporazuma preuzete su iz (Rajaković 2008), gdje su koordinate te točke određene na temelju Protokola između Vlade Republike Hrvatske i Savezne vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država iz 2002. godine (slika 1). Za referentni elipsoid uzet je GRS80 i svi su podaci svedeni na taj elipsoid.

Takvo nepravilno područje aproksimirano je pravilnom mrežom od 11 934 elipsoidna trapeza veličine 2' (slika 2). Ta je veličina izabrana na temelju istraživanja (Tutić i Lapaine 2008), gdje se pokazuje da se vrijednosti nepoznatih koeficijenata u projekciji ne razlikuju znatno od onih dobivenih još gušćom mrežom elipsoidnih trapeza.

Aproksimacija nepravilnog područja elipsoidnim trapezima praktično je izvedena kao izbor onih poligona u mreži elipsoidnih trapeza koji se preklapaju ili su unutar područja Hrvatske. Takav postupak moguće je provesti unutar programa za GIS ili prostornih baza podataka. Za potrebe ovog rada upotrijebljen je program GRASS GIS (URL 3).



Slika 1. Podaci kojima je definirano područje Hrvatske.

3.2. Kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za konformne projekcije

Najveća apsolutna linearna deformacija na nekom području A definirana je sljedećom formulom:

$$d_{\max} = \max_A |c - 1|,$$

gdje je c linearno mjerilo u projekciji.

Za nepravilna područja i projekcije sa složenim rasporedom deformacija strogo nalaženje $\max_A |c - 1|$ nije uvijek moguće. Zbog toga je područje A potrebno aproksi-

mirati konačnim skupom točaka $T = \{(\varphi_i, \lambda_i), i = 1..n\}$ u kojima se računa linearno mjerilo i traži najveća apsolutna linearna deformacija, odnosno:

$$d_{\max} = \max_T |c_i - 1|.$$

Kako je navedeno u prethodnom potpoglavlju, u ovome radu područje A aproksimira se mrežom elipsoidnih trapeza veličine $2'$. Središta tih trapeza čine skup T .

Ako se za izabranu projekciju nađe skup vrijednosti parametara te projekcije $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ za koji se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, tj.

$$\min_P d_{\max} = \min_P \max_T |c_i - 1|$$

varijanta izabrane projekcije određena skupom vrijednosti parametara P bit će nazvana optimalnom projekcijom po kriteriju najmanje najveće linearne deformacije.

S obzirom na to da se traži minimum funkcije koja je zadana na nepravilnom geografskom području, te da derivacija funkcije u slučaju kriterija najmanje najveće apsolutne linearne deformacije ne postoji, metoda po Nelderu i Meadu (1965) koja omogućuje traženje minimuma funkcije samo na temelju računanja njezine vrijednosti posebno je pogodna. Istu metodu upotrijebio je Canters (2002) i zaključio da je takva metoda dobar izbor. Analogne rezultate pokazala je i primjena u ovome radu. Upotrijebljeno je okruženje *MATLAB*-a za praktična računanja (URL 1).

4. Uspredba postojećih i novih optimalnih konformnih projekcija

Od postojećih poznatih konformnih projekcija za usporedni prikaz izabrana je stara Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona (Abakumov i dr. 1928), nova službena poprečna Mercatorova (Gauss-Krügerova) projekcija za Hrvatsku (Lapaine 2000, NN 2004a, 2004b) i nova Lambertova konformna konusna projekcija (Lapaine 2000, NN 2004a).

Od novih optimalnih projekcija dane su varijante Gauss-Krügerove, Lambertove konformne konusne, stereografske, a istražene su i konformne polinomne projekcije stupnja 2. do 10. Za staru Gauss-Krügerovu projekciju meridijanskih zona i konformne polinomne projekcije 6. i 10. stupnja ocjena linearnih deformacija dana je i za područje kopna. Usporedni prikaz svih projekcija s iznosom najveće apsolutne linearne deformacije dan je u tablici 1.

Na slici 2 prikazani su raspored i veličina deformacija u staroj Gauss-Krügerovoj projekciji meridijanskih zona. To je i jedina varijanta projekcije u dvije zone koja se u ovom radu razmatra isključivo zbog njezine dugogodišnje upotrebe i zbog toga što je ona poznata najširem krugu hrvatskih geodetskih stručnjaka. Promatrali se samo područje kopna, najveća linearna deformacija iznosi 1 dm/km, što je zapravo i bio uvjet prilikom njezina izbora. Uzme li se u obzir i epikontinentalni pojas, tada je najveća apsolutna linearna deformacija dvostruko veća, odnosno 2,09 dm/km.

Tablica 1. *Najveća apsolutna linearna deformacija u različitim konformnim projekcijama za Hrvatsku.*

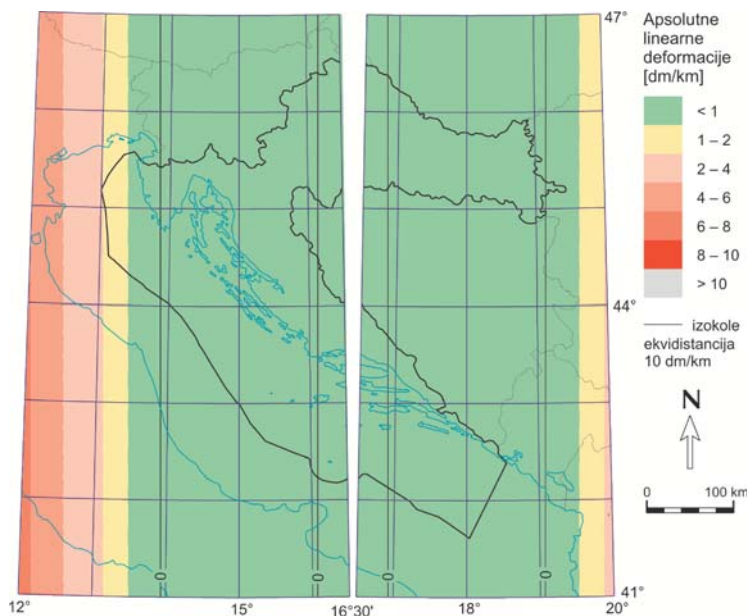
Projekcija	Varijanta	Najveća apsolutna lin. def. [dm/km]
Gauss-Krügerova (poprečna Mercatorova)	(Abakumov i dr. 1928) – dvije zone samo za kopno	1,00
	(Abakumov i dr. 1928) – dvije zone	2,09
	(Lapaine 2000, NN 2004a, 2004b)	8,39
	Optimalna	3,97
Lambertova konformna konusna	(Lapaine 2000, NN 2004a)	9,43
	Optimalna	4,62
Stereografska	Optimalna	2,73
Polinomna 2. stupnja	Optimalna	4,02
Polinomna 3. stupnja	Optimalna	2,45
Polinomna 4. stupnja	Optimalna	1,78
Polinomna 5. stupnja	Optimalna	1,76
Polinomna 6. stupnja	Optimalna	1,36
	Optimalna samo za kopno	1,02
Polinomna 7. stupnja	Optimalna	1,28
Polinomna 8. stupnja	Optimalna	1,25
Polinomna 9. stupnja	Optimalna	1,23
Polinomna 10. stupnja	Optimalna	1,15
	Optimalna samo za kopno	0,86

Sljedeća ispitana varijanta Gauss-Krügerove projekcije nova je službena projekcija za kartiranje u mjerilima krupnijim od 1:500 000. To je projekcija u jednoj zoni, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi 8,39 dm/km. Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 3. Kad se primijeni jedna zona Gauss-Krügerove projekcije na područje Hrvatske, apsolutne linearne deformacije mogu narasti i nekoliko puta na krajnjim dijelovima područja. Prilikom izbora te projekcije vodilo se računa o tome da se što veće područje Hrvatske preslika s deformacijama manjim od 1 dm/km (Lapaine 2000).

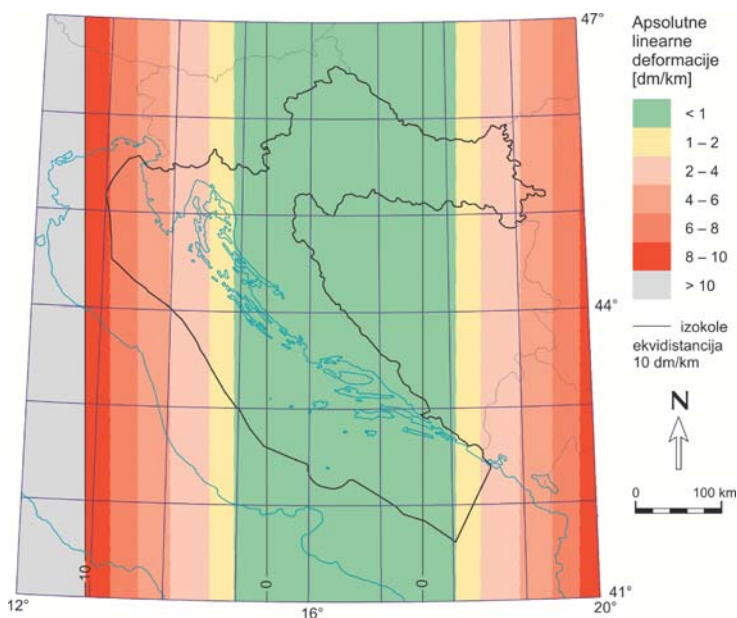
Nade li se optimalna Gauss-Krügerova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije, tada ona iznosi 3,97 dm/km. Raspored i veličina deformacija u toj varijanti prikazani su na slici 4.

U novoj Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji za Hrvatsku (NN 2004a) najveća linearna deformacija na razmatranom području iznosi 9,43 dm/km. Ta je deformacija usporediva s onom u novoj Gauss-Krügerovoj projekciji (Lapaine 2000, NN 2004a, 2004b). Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 5. Prilikom izbora parametara te projekcije razmatralo se kopneno područje Hrvatske (Lapaine 2000).

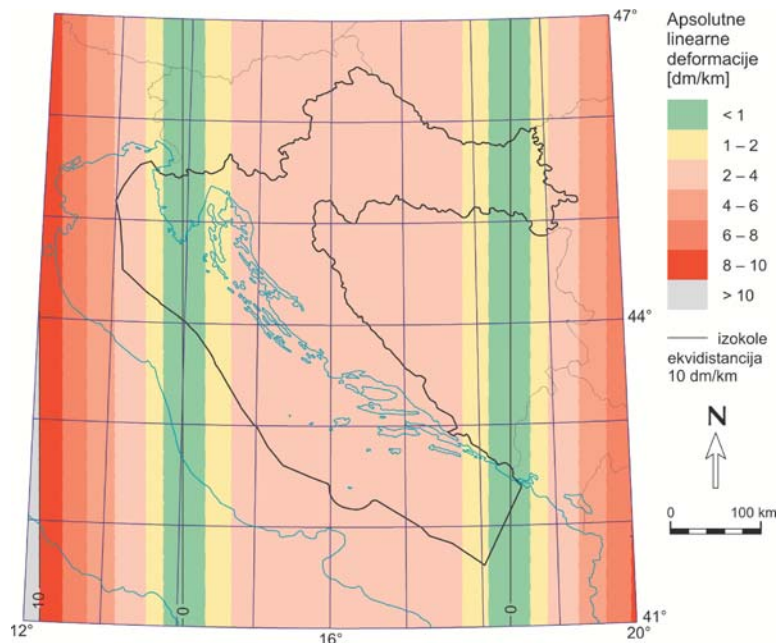
Nade li se optimalna Lambertova konformna konusna projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije, tada ona iznosi 4,62 dm/km.



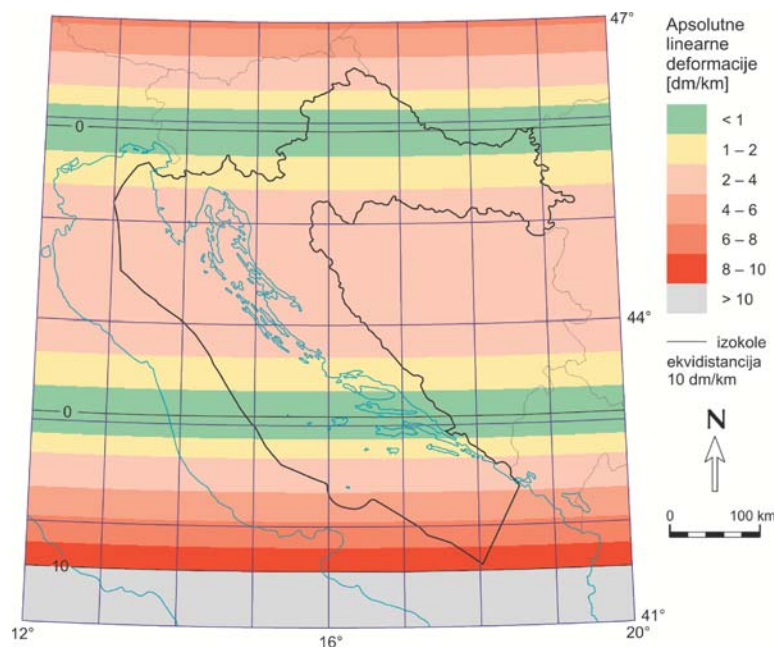
Slika 2. Raspored i veličina deformacija u dvije zone Gauss-Krügerove projekcije (Abakumov i dr. 1928) sa srednjim meridianima $\lambda_0 = 15^\circ$ i $\lambda_0 = 18^\circ$. Linearno mjerilo na srednjem meridianu $c_0 = 0,9999$.



Slika 3. Linearne deformacije u Gauss-Krügerovoj projekciji (NN 2004a, 2004b) sa srednjim meridianom $\lambda_0 = 16^\circ 30'$. Linearno mjerilo na srednjem meridianu $c_0 = 0,9999$.



Slika 4. Linearne deformacije u optimalnoj Gauss-Krügerovoj projekciji. Srednji meridian $\lambda_0 = 16^\circ 13'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0,999603$.



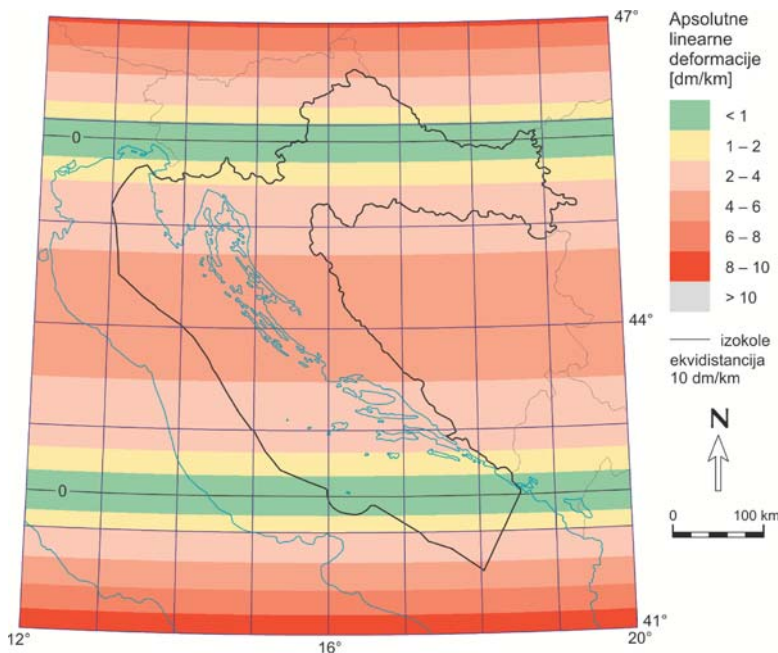
Slika 5. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji (Lapaine 2000, NN 2004a) sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^\circ 05'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 55'$.

Raspored i veličina deformacija u toj varijanti prikazani su na slici 6. Dakle, optimalna Gauss-Krügerova projekcija nešto je bolja od Lambertove konformne kosusne u smislu postavljenoga kriterija.

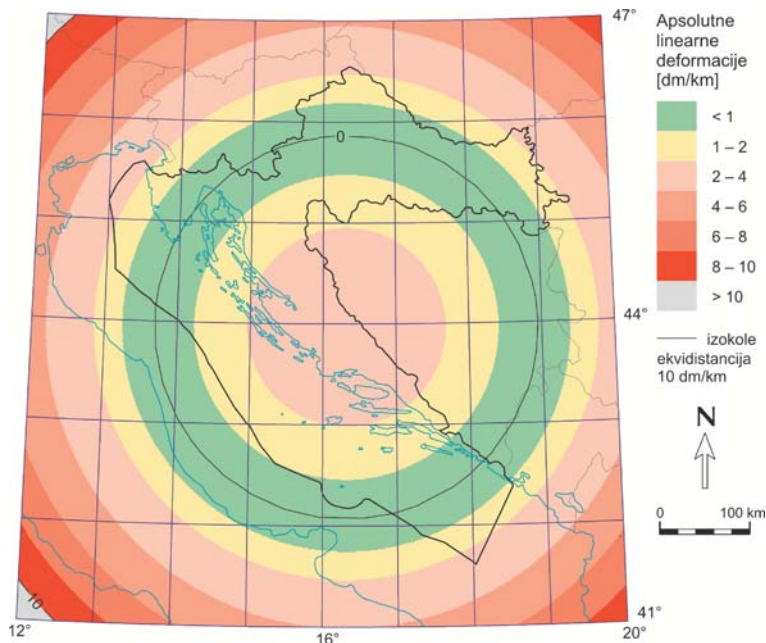
Primijeni li se varijanta stereografske projekcije kako je opisana u (Tutić i Lapaine 2008, Tutić 2008) na zadano područje Hrvatske i nađe njezina optimalna varijanta, najveća apsolutna linearna deformacija iznosi 2,73 dm/km. Dakle, stereografska je projekcija u odnosu na prethodne dvije optimalne projekcije povoljnija u smislu postavljenoga kriterija. Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 7.

Konformne polinomne projekcije određenoga konačnog stupnja, kao jedan pristup rješenju konformnog preslikavanja u obliku konačnih redova, do sada nisu istraživane i primjenjivane za područje Hrvatske. Pod pojmom konformnih polinomnih projekcija smatrat će se preslikavanje plohe rotacijskog elipsoida u ravninu izraženo polinomima kompleksne varijable.

Prema Cantersu (2002) već su 1932. godine Driencourt i Laborde predložili polinome kompleksne varijable radi pronalaženja povoljnijih projekcija s obzirom na oblik područja. Reilly (1973) opisuje postupak pronalaženja povoljne konformne projekcije za Novi Zeland. Frankić (1982) istražuje optimalne projekcije za područje Kanade. Među ostalim, nalazi i konformne projekcije koristeći polinome kao funkcije izometrijskih koordinata. Nestorov (1996) traži optimalne konformne projekcije za područje bivše SFR Jugoslavije. González López (1995) upotrebljava polinome kompleksne varijable za nalaženje konformnih projekcija za



Slika 6. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lambertovoj konformnoj kosusnoj projekciji. Standardne paralele $\varphi_1 = 42^\circ 21'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$.



Slika 7. Linearne deformacije u optimalnoj stereografskoj projekciji. Pol projekcije na $\varphi_0 = 43^\circ 58'$, $\lambda_0 = 16^\circ 19'$ i linearno mjerilo u polu $c_0 = 0,999727$.

Čile i Sredozemno more. Poznate su Snyderove adaptabilne projekcije za američke države također dobivene u obliku polinoma (Snyder 1987).

Za konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida u ravninu polinomi n -tog stupnja mogu se zapisati na sljedeći način:

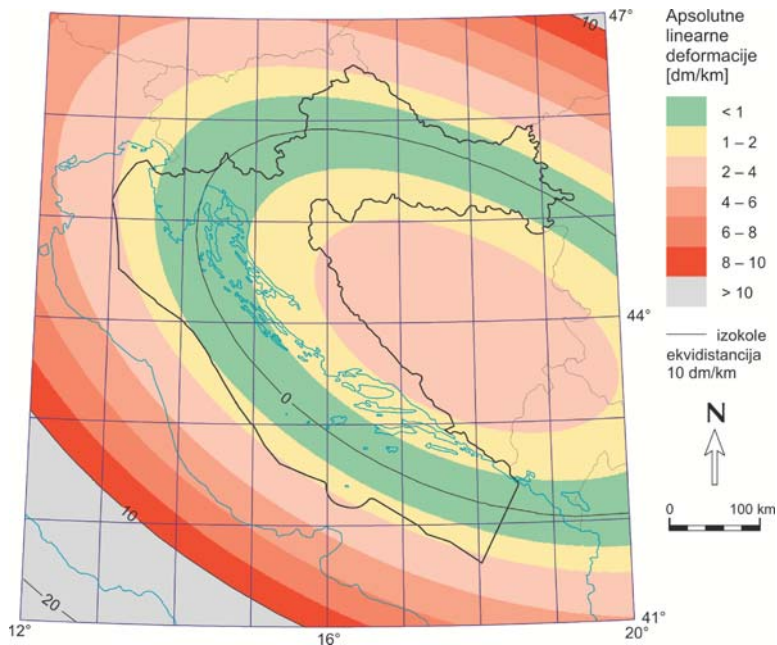
$$\omega = \sum_{j=0}^n C_j z^j,$$

gdje su $\omega = x + iy$, $C_j = a_j + ib_j$, $z = q + i\lambda$ i $q = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right)$

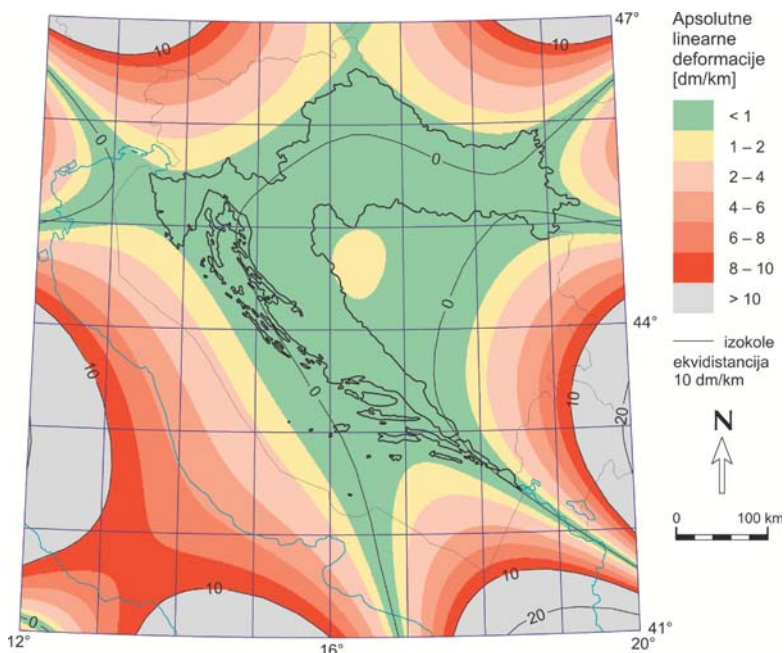
izometrijska širina na rotacijskom elipsoidu te e prvi numerički ekscentricitet.

Detaljna formulacija konformnih polinomnih projekcija može se naći u (Tutić 2008 i Tutić 2009). Zbog ograničenog prostora ovdje će se prikazati samo neki dobiveni rezultati u obliku karata rasporeda i veličine deformacija. Optimalna konformna polinomna projekcija 3. stupnja po zadanom kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije prikazana je na slici 8. U toj projekciji najveća apsolutna linearna deformacija iznosi 2,45 dm/km. Dakle, u smislu postavljenoga kriterija ova je projekcija nešto bolja od stereografske projekcije.

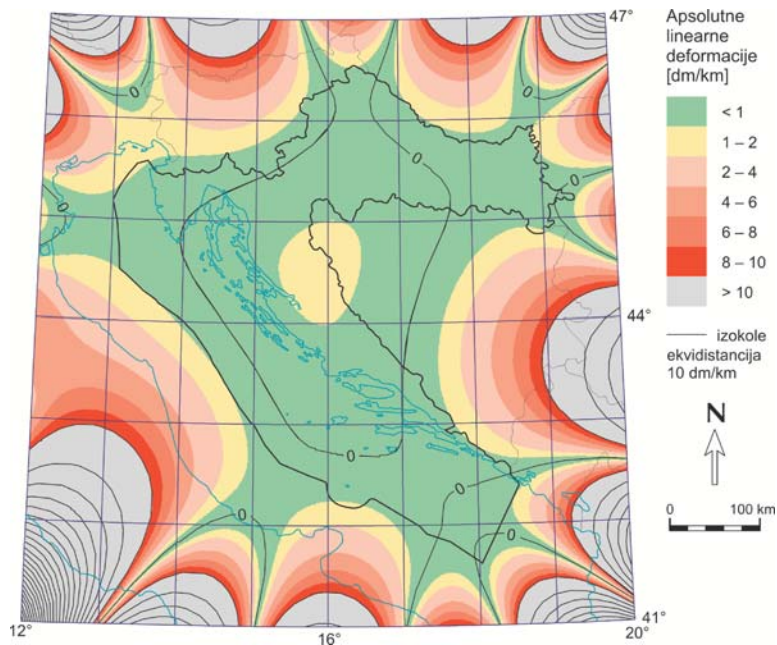
Posebno je zanimljiva optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja, primijenjena na kopneno područje Hrvatske (slika 9). Za to područje optimalna pro-



Slika 8. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.



Slika 9. Linearne deformacije u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja kopnenog područja Hrvatske ($d_{\max} = 1,02$ dm/km).



Slika 10. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije ($d_{\max} = 1,15 \text{ dm/km}$).

jekcija ima najveću apsolutnu linearnu deformaciju od 1,02 dm/km i praktično je jednaka apsolutnim linearnim deformacijama koje su postojale u dva stara koordinatna sustava Gauss-Krügerove projekcije (Abakumov i dr. 1928). Ta projekcija ima relativno povoljan oblik izokola u odnosu na područje Hrvatske.

Povećanje stupnja polinoma dovodi i do sve manjih apsolutnih linearnih deformacija (vidi tablicu 1). Ispitani su polinomi do 10. stupnja, a svako povećanje stupnja polinoma dovodi do sve složenijih izraza za ravninske koordinate i linearno mjerilo. Ravnotežu između složenosti izraza i najvećih apsolutnih linearnih deformacija predstavlja konformna polinomna projekcija 6. stupnja. Slika 10 prikazuje optimalnu polinomnu konformnu projekciju 10. stupnja za zadano područje državnog teritorija i epikontinentalnog pojasa. Najveća apsolutna linearna deformacija iznosi 1,15 dm/km.

5. Zaključak

Stara Gauss-Krügerova projekcija u dvije zone ima male linearne deformacije (za kopno 1 dm/km, za zadano područje 2,09 dm/km), no iako je riječ o preslikavanju u dva koordinatna sustava ta projekcija nije i najpovoljnija od istraženih konformnih projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.

Službene varijante Gauss-Krügerove i Lambertove konformne konusne projekcije imaju deformacije na zadanom području reda veličine 9 dm/km, što je oko dva puta

više nego u optimalnim varijantama tih projekcija po zadanom kriteriju, međutim, kako je već rečeno službene projekcije su određene na temelju drugačijih uvjeta.

Stereografska projekcija može dati manje apsolutne linearne deformacije za područje Hrvatske od Lambertove konformne konusne i Gauss-Krügerove projekcije, i to reda veličine 3 dm/km.

Optimalne varijante polinomne projekcije 2. stupnja usporedive su s optimalnim varijantama Gauss-Krügerove projekcije. Optimalne varijante polinomne projekcije 3. stupnja usporedive su s optimalnim varijantama stereografske projekcije. Optimalne varijante polinomnih projekcija od 4. do 10. stupnja nastavljaju trend sve manjih vrijednosti apsolutnih linearnih deformacija, što je i prirodno očekivati. Veći stupanj polinoma dovodi do sve složenijih izraza za ravninske koordinate i mjerilo. Optimalna varijanta polinomne projekcije 10. stupnja zaista daje i najmanju vrijednost kriterija od svih prethodnih projekcija (vidi tablicu 1).

Na temelju rezultata u tablici 1 može se pokušati donijeti i procjena o najmanjim mogućim apsolutnim linearnim deformacijama u konformnim projekcijama za Hrvatsku. Za područje Hrvatske s epikontinentalnim pojasom teško je očekivati konformnu projekciju koja bi imala deformacije manje od 1 dm/km, odnosno ta je deformacija po svoj prilici vjerojatno i granična. Naravno, to je samo procjena. Za kopneno područje procjena za najmanje deformacije mogla bi biti oko 0,8 dm/km. Ravnotežu između složenosti koja proizlazi iz polinoma visokog stupnja i vrijednosti kriterija predstavljaju optimalne polinomne projekcije 6. stupnja.

Literatura

- Abakumov, N. P. (1942): Gauss-Krügerova projekcija u primjeni na područje Nezavisne Države Hrvatske, Hrvatska državna izmjera, br. 5, 70–74.
- Abakumov, N. P., Dražić, M., Svečnikov, N., Sviščev, I. i dr. (1928): Projekcija novog katastarskog premera u Kraljevini SHS, Geometarski glasnik, br. 3, 53–61, br. 4, 101–109, br. 5, 165–170.
- Abakumov, N. P., Dražić, M., Svečnikov, N., Sviščev, I. (1929): Projekcija novog katastarskog premera u Kraljevini SHS, Geometarski glasnik, br. 1, 16–25, br. 2, 80–87, br. 3, 130–135.
- Canter, F. (2002): Small-scale Map Projection Design, Taylor & Francis, London and New York.
- Filkuka, V. (1919a): Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji, Glasilo geometara, br. 1 i 2, 2–5, br. 4, 5 i 6, 49–54, br. 7 i 8, 81–90.
- Filkuka, V. (ur.) (1919b): Zapisnik Odborske sjednice obdržane dne 22. lipnja 1919 u Zagrebu, Glasilo geometara, br. 4, 5 i 6, 69–72.
- Frankić, K. (1982): Optimization of Geographic Map Projections for Canadian Territory, Dissertation, Simon Fraser University, Burnaby.
- Gauss, C. F. (1828): Werke, Band IX, Reprint iz 1903, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.
- González López, S. (1995): Conformal map projections by least squares adjustment with conditions between parameters, u Proceedings of the 17th International Cartographic Conference, Barcelona, str. 776–780.

- Lambert, J. H. (1772): Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Dritter Theil, im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin. U prijevodu na engleski s uvodom W. R. Toblera pod naslovom: Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps, Michigan Geographical Publication No. 8, Department of Geography, University of Michigan, Ann Arbor, 1972.
- Lapaine, M. (2000): Prijedlog službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Državna geodetska uprava, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Lapaine, M. (2006): Nova kartografska projekcija Republike Hrvatske – HTRS96/TM – upute za praktičnu primjenu, I. dio, Računanja, Državna geodetska uprava, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Lapaine, M., Tutić, D. (2007): O novoj službenoj kartografskoj projekciji Hrvatske – HTRS96/TM, Kartografija i geoinformacije, izv. br., 34–53.
- Narodne novine (2004a): Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine, br. 110/04.
- Narodne novine (2004b): Ispravak Odluke o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine, br. 117/04.
- Nelder, J. A., Mead, R. (1965): A Simplex Method for Function Minimization, The Computer Journal, No. 7, 308–313, doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- Nestorov, I. (1996): Nove optimalne kartografske projekcije, Zadrubina Andrejević, Beograd.
- Rajaković, M. (2007): Konusne projekcije za Hrvatsku, Studentski rad nagrađen Nagradom dekana, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Rajaković, M. (2008): Najbolja konformna konusna projekcija za Hrvatsku, Studentski rad za Dekanovu nagradu, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Reilly, W. I. (1973): A Conformal Mapping Projection with minimum Scale Error, Survey Review, Vol. 22, No. 168, 57–71.
- SFRJ (1970): Međunarodni ugovori i drugi sporazumi, br. 28/1970.
- SGU (1953): Osnovni geodetski radovi u F. N. R. Jugoslaviji, Savezna geodetska uprava, Beograd.
- Snyder, J. P. (1987): Map Projections: A Working Manual, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, Washington.
- Tutić, D. (2008): Stereografska i druge konformne projekcije za Hrvatsku, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Tutić, D. (2009): Optimalne konformne polinomne projekcije za Hrvatsku po Airy/Jordanovom kriteriju, Kartografija i geoinformacije, Vol. 8, br. 11, 48–67.
- Tutić, D., Lapaine, M. (2008): Stereographic map projection for Croatia, U Gunter, W. (ur.) ICGG 2008 Proceedings, ISGG and Technische Universität Dresden, 2008, CD-izdanje, ISBN 978-3-86780-042-6.
- URL 1: MATLAB – The Language Of Technical Computing, <http://www.mathworks.com/products/matlab/>, (17. 4. 2010.).
- URL 2: Državna geodetska uprava – Euro Global Map mj. 1:1 000 000 (EGM), <http://www.dgu.hr/default.asp?ID=900>, (17. 4. 2010.).
- URL 3: GRASS GIS – The World Leading Free Software GIS, <http://grass.itc.it/>, (17. 4. 2010.).

Conformal Map Projections for Croatia with Minimal Absolute Linear Distortions

ABSTRACT. In this paper the comparison of the existing versions of conformal map projections for Croatia and the new optimal conformal map projections according to the criterion of minimal maximal absolute linear distortion is given. Gauss-Krüger's and Lambert's conformal conic projections were, still are and will be applied for official mapping of the state. The linear distortions in some existing versions of these projections are given together with optimal versions. Next, the application of the stereographic map projection is performed. It is shown that Gauss-Krüger's and Lambert's conformal conic projections are similar according to the criterion. The stereographic map projection is even better in the same sense. Beside these standard conformal map projections, the conformal polynomial projections are also investigated. The degree of the polynomials applied is from 2nd to 10th. It is shown that these projections can give considerably lower absolute linear distortions, caused by irregular shape of the region. For example, the land area of Croatia can be mapped with maximal absolute linear distortion of 1 dm/km with conformal polynomial projection of the 6th degree. As a region of Croatia the state territory with epicontinental sea zone as well as only the continental part of Croatia were accounted. The optimal versions of the map projections were found using numerical approach with application of the software package MATLAB.

Keywords: conformal map projections, map projections in Croatia, minimal absolute linear distortions.

Prihvaćeno: 2010-08-09