Hrvatski matematički elektronski časopis math.e
Broj 7

**http://www.math.hr/mathe/**

# Popločavanja ravnine

Kristina Krulić

## 1. Problem popločavanja ravnine

Ukrašavanje životnog prostora oduvijek je bila ljudska praksa, od prvobitnih spilja, velebnih egipatskih građevina pa do danas. Razvojem i napretkom ljudske kulture razvija se umjetnost i potreba za lijepim i skladnim sve više dolazi do izražaja. Mnogi crteži prikazuju predmete iz života i prirode, a na nekima možemo uočiti figure koje se periodički ponavljaju, poprimaju geometrijske oblike s mnogo simetrije i pokazuju pravilnost kakvu u prirodi rijetko susrećemo. Tako je pomalo od slobodnih crteža nastao ornament. Stvaralac takvih crteža morao je s estetskim ukusom sjediniti i stanovito geometrijsko znanje. Javlja se i potreba za ukrašavanjem zidova i podova. Njih, također, možemo ukrasiti pravilnim geometrijskim figurama.

Problem popločavanja ili parketiranja drevni je problem koji možemo naći kod starih Egipćana, Perzijanaca, Grka, Rimljana, a također u Kini, Japanu te u drugim starim civilizacijama. Što je to problem parketiranja, tj. popločavanja ravnine? Treba razdijeliti ravninu na mnogokute koji bi je u potpunosti prekrivali, bez praznina i preklapanja, uz određene pravilnosti s obzirom na vrstu, oblik i poredak mnogokuta.

Razdiobu ravnine na pravilne mnogokute možemo vidjeti na ulicama, trgovima i na mnogim umjetničkim slikama. Time se pokazuje da matematika i umjetnost imaju mnogo toga zajedničkog iako neki misle da su upravo na suprotnim krajevima širokog i bogatog spektra ljudskih djelatnosti.

## 2. Pravilna popločavanja ravnine

Prije razmatranja problema popločavanja treba uvesti neke osnovne pojmove.

**Particija** skupa $K$ je familija nepraznih, međusobno disjunktnih podskupova od $K$ kojima je unija čitav skup $K$.

Zanimaju nas rastavi ravnine na mnokogute koji imaju zajedničke stranice i vrhove, a unutrašnjosti su im disjunktne. Takve rastave također ćemo zvati *razdiobama* ili *particijama*. Mnogokute koji se sijeku u vrhovima ili stranicama nazivamo *susjednim mnogokutima*. Točku ravnine u kojoj se sastaju vrhovi susjednih mnogokuta nazivamo *čvorištem* particije. Ako su svi kutovi mnogokuta koji se sastaju u jednom čvorištu međusobno sukladni, onda takvo čvorište nazivamo *pravilnim čvorištem*. Također, kažemo da su dva čvorišta *sukladna* ako je slijed kutova koji se u njemu sastaju isti. Problem koji se postavlja jest pronaći sve moguće razdiobe, tj. popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima, pri čemu svi mnogokuti i sva čvorišta moraju biti sukladni. Takva ćemo popločavanja zvati *pravilnim popločavanjima ravnine*.

Pokušajmo sada ovaj geometrijski problem zapisati algebarski, tj. svesti ga na jednadžbu. Očito, prvi uvjet koji mora biti ispunjen je da zbroj veličina kutova u svakom čvorištu iznosi 360°. Također, znamo da zbroj veličina unutrašnjih kutova u $n$-terokutu iznosi $(n-2)\cdot180°$. Budući da su u pravilnom $n$-terokutu svi unutrašnji kutovi međusobno sukladni, njihova veličina iznosi

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}.$$

Vratimo se sada postavljenom problemu. Ako se u svakom čvorištu sastaje $k$ pravilnih $n$-terokuta, onda upravo postavljeni uvjet možemo izraziti diofantskom jednadžbom

$$k\cdot\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360°, \tag{1}$$

uz uvjet da su $k,n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$ (mnogokut s najmanjim brojem stranica je trokut). Znači, problem pravilnog popločavanja ravnine sveli smo na rješavanje diofantske jednadžbe. Rezultat je dan sljedećim teoremom.

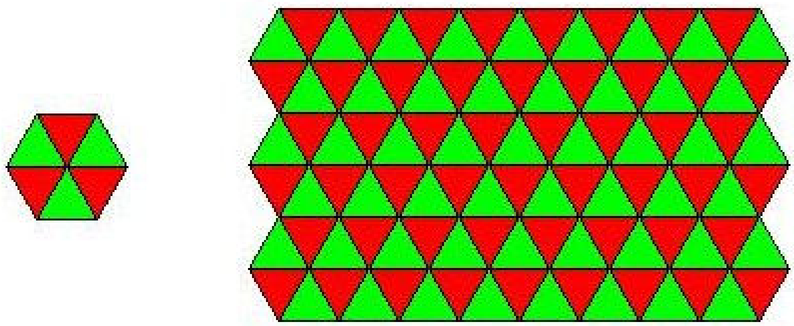
**Teorem 1.** Jedina pravilna popločavanja ravnine su na jednakostranične trokute, kvadrate i pravilne šesterokute, i to tako da ih se u jednom čvorištu sastaje po šest, četiri, odnosno po tri.

*Dokaz.* Da bismo dokazali ovaj teorem, potrebno je riješiti diofantsku jednadžbu (*1*). Njezinim skraćivanjem sa 180 te množenjem s $n$ dobijemo jednadžbu $k\cdot(n-2) = 2n$. Dalje, dijeljenjem s $n-2$ slijedi

$$k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}. \qquad (2)$$

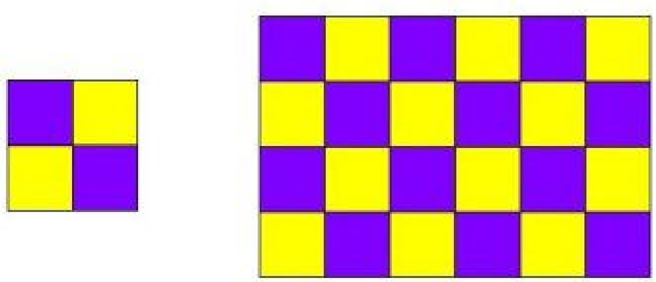
Rješenja tražimo u skupu prirodnih brojeva pa zaključujemo da $n - 2$ mora biti djeljitelj od 4. To znači da je $n - 2$ element skupa $\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, odnosno $n \in \{-2,0,1,3,4,6\}$. Neke mogućnosti možemo odmah eliminirati jer je $n \geq 3$. Ostaju samo tri mogućnosti: $n = 3$ (jednakostraničan trokut), $n = 4$ (kvadrat) i $n = 6$ (pravilni šesterokut). Preostaje nam još izračunati odgovarajuće $k$-ove, koje dobijemo uvrštavanjem u izraz (2). Tako za $n = 3$ dobijemo $k = 6$, za $n = 4$ dobijemo $k = 4$, a za $n = 6$ dobijemo $k = 3$.

Prikažimo pravilna popločavanja ravnine!



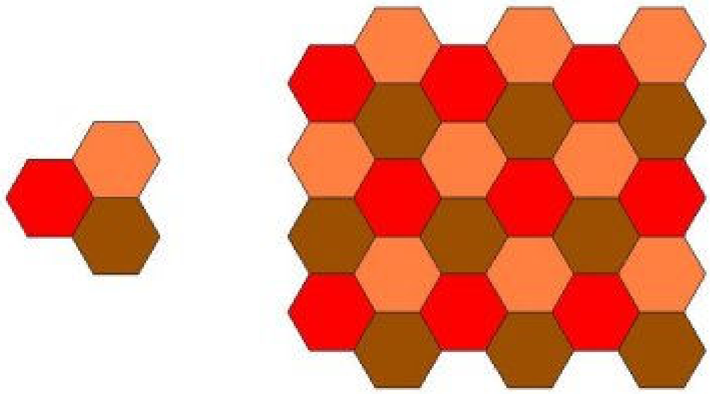
**Slika 1.**

Popločavanje jednakostraničnim trokutima vidimo na slici 1. Ovo popločavanje označavamo (3,3,3,3,3,3) - redom napišemo brojeve stranica mnogokuta koji se sastaju u jednom čvorištu. Dakle, imamo šest jednakostraničnih trokuta.



**Slika 2.**

Na slici 2 vidimo popločavanje kvadratima. Označavamo ga (4,4,4,4).



**Slika 3.**

Konačno, na slici 3 prikazano je popločavanje pravilnim šesterokutima, koje označavamo (6,6,6).

## 3. Arhimedova popločavanja ravnine

Dosad smo proučavali pravilna popločavanja ravnine. Promotrimo sada slučaj kada se u čvorištima sastaje više vrsta pravilnih mnogokuta. Za početak odredimo koliko se najviše različitih pravilnih mnogokuta može sastajati u istoj točki. Opet postavljamo isti uvjet, da zbroj veličina kutova u svakom čvorištu iznosi 360°. Promatramo jednakostranične trokute, kvadrate, pravilne peterokute i pravilne šesterokute. S $\alpha_n$ označimo veličinu unutrašnjeg kuta pravilnog $n$-terokuta. U prethodnom poglavlju koristili smo činjenicu da zbroj veličina unutrašnjih kutova u $n$-terokutu iznosi $(n-2)\cdot 180°$, iz čega slijedi

$$\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}. \tag{3}$$

Postavljeni uvjet tada možemo zapisati $\sum \alpha_n = 360°$, gdje se sumira po $n = 3, 4, 5, 6$. Uvrštavanjem u formulu (3) vidimo da veličina unutrašnjeg kuta jednakostraničnog trokuta iznosi $\alpha_3 = 60°$, kvadrata $\alpha_4 = 90°$, pravilnog peterokuta $\alpha_5 = 108°$, a pravilnog šesterokuta $\alpha_6 = 120°$. To su pravilni mnogokuti s najmanjim brojem stranica i najmanjom veličinom unutrašnjeg kuta. Pretpostavimo da u nekoj razdiobi ravnine jedno čvorište čine upravo ta četiri pravilna mnogokuta. Tada je
$60° + 90° + 108° + 120° = 378°$, što je veće od 360°. Ako bismo zamijenili jedan od ovih pravilnih mnogokuta pravilnim mnogokutom s većim brojem stranica, odnosno većom veličinom unutrašnjeg kuta, suma bi bila još veća. Zaključujemo da u razdiobi ravnine na pravilne mnogokute ne može biti više od tri različite vrste pravilnih mnogokuta. Time smo dokazali ovaj teorem.

**Teorem 2.** U razdiobi ravnine na pravilne mnogokute ne može biti više od tri različite vrste pravilnih mnogokuta.

Problem koji se postavlja jest pronaći sve moguće razdiobe, tj. popločavanja ravnine u pravilne mnogokute, pri čemu mnogokuti mogu imati različit broj stranica, ali sve stranice i sva čvorišta moraju biti sukladni. Takva ćemo popločavanja zvati *Arhimedovim* ili *polupravilnim* popločavanjima ravnine.

Pokušajmo sada razdijeliti ravninu uz tražene uvjete. Za početak uzmimo slučaj razdiobe ravnine s dvjema različitim vrstama pravilnih mnogokuta. Neka se u jednom čvorištu sastaje $k_1$ pravilnih $n_1$-terokuta i $k_2$ pravilnih $n_2$-terokuta. Nuždan uvjet je da zbroj veličina kutova oko jednog čvorišta bude 360°, što možemo zapisati diofantskom jednadžbom

$$k_1 \cdot \frac{(n_1-2)\cdot 180°}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2-2)\cdot 180°}{n_2} = 360°, \qquad (4)$$

uz uvjet da su $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ i $n_1, n_2 \geq 3$. Ostaje nam vidjeti postoje li dodatni uvjeti na $k$-ove. Znamo da je najmanji broj pravilnih mnogokuta koji čine jedno čvorište tri (razdioba ravnine na pravilne šesterokute) pa zaključujemo da je $k_1 + k_2 \geq 3$. Također, najveći broj pravilnih mnogokuta koji čine jedno čvorište je šest (razdioba ravnine na jednakostranične trokute) pa je $k_1 + k_2 < 6$ (jer imamo barem jedan mnogokut koji nije trokut). Riješimo sada diofantsku jednadžbu (*4*) uz opisane uvjete. Skraćivanjem sa 180 i daljnjim sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$k_1 \cdot (1/2 - 1/n_1) + k_2 \cdot (1/2 - 1/n_2) = 1. \qquad (5)$$

Uz uvjet $3 \leq k_1 + k_2 < 6$ za brojeve $k_1$ i $k_2$ imamo sljedeće mogućnosti, koje ćemo radi preglednosti zapisati u tablici:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| $k_2$ | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 3 |

Za svaku od ovih mogućnosti rješavamo jednadžbu (*5*).

**1. slučaj:** $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ili $k_1 = 2$, $k_2 = 1$

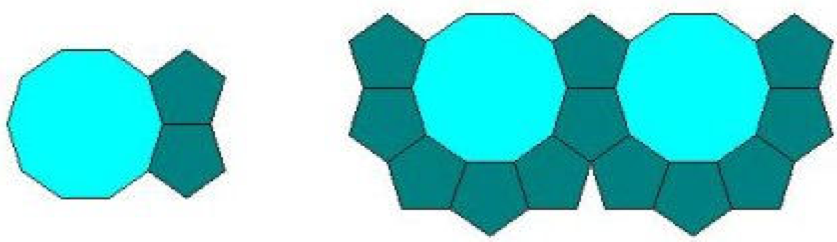
Uvrštavanjem vrijednosti $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$ u jednadžbu (5) i sređivanjem dobivamo

$$n_1 = 2 + \frac{8}{n_2 - 4}. \tag{6}$$

Rješenja za $n_1$ tražimo u skupu prirodnih brojeva pa zaključujemo da $n_2 - 4$ mora biti djeljitelj od 8. To znači da je $n_2 \in \{-4,0,2,3,5,6,8,12\}$. S obzirom da je $n_2 \geq 3$, imamo samo pet mogućih vrijednosti za $n_2$. Uvrštavanjem u (6) dobivamo $n_1 \in \{-6,10,6,4,3\}$. Prva mogućnost ponovo otpada pa imamo četiri mogućnosti za $n_1$ i $n_2$ ako je $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$:

1. $n_1 = 10$, $n_2 = 5$: dva pravilna peterokuta i pravilni deseterokut, (5,5,10);
2. $n_1 = 6$, $n_2 = 6$: tri pravilna šesterokuta, (6,6,6);
3. $n_1 = 4$, $n_2 = 8$: kvadrat i dva pravilna osmerokuta, (4,8,8);
4. $n_1 = 3$, $n_2 = 12$: jednakostraničan trokut i dva dvanaesterokuta, (3,12,12).

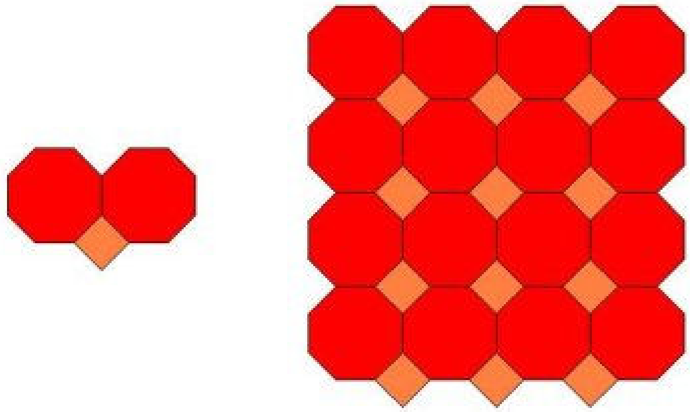
Dobivene mogućnosti ne moraju biti rješenja postavljenog problema. Koristili smo nuždan uvjet da zbroj veličina kutova u čvorištu iznosi 360°, koji nije dovoljan uvjet. Sad ćemo pokušati popločiti ravninu na ta četiri načina.



**Slika 4.**

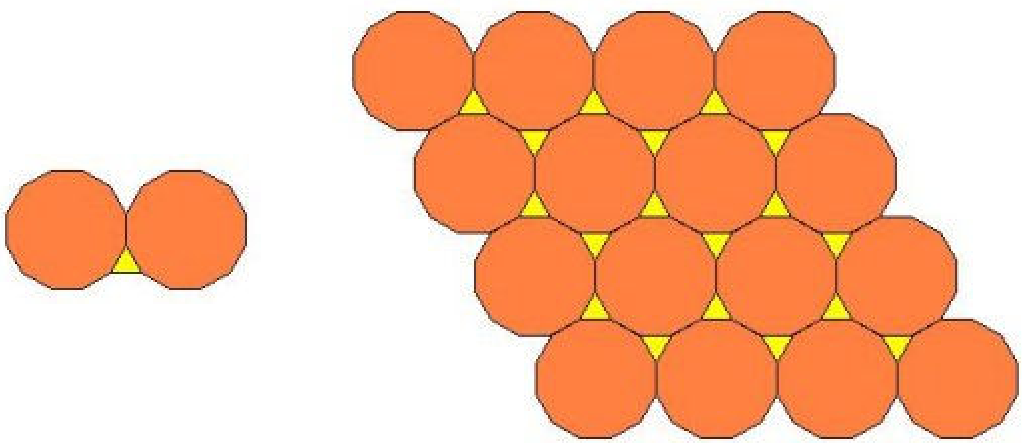
1\. Krenemo od čvorišta i brojimo stranice mnogokuta koji formiraju čvorište, s time da počnemo s mnogokutom koji ima najmanji broj stranica. Uočavamo da ravninu ne možemo popločiti dvama pravilnim peterokutima i pravilnim deseterokutom jer se pri takvom popločavanju pojavljuje praznina, što nije u skladu s definicijom popločavanja.

2\. Popločavanje (6,6,6) je moguće. To je popločavanje ravnine pravilnim šesterokutima koje smo vidjeli na slici 3.



**Slika 5.**

3. Popločavanje (4,8,8) prikazano je na slici 5. Ravninu možemo popločiti kvadratom i dvama pravilnim osmerokutima oko svakog čvorišta bez ikakvih praznina ili preklapanja. Uočimo također da su sva čvorišta sukladna, što je u skladu s definicijom Arhimedovog popločavanja ravnine.



**Slika 6.**

4. Na slici 6 vidimo da se ravnina može popločiti na način (3,12,12), tj. tako da se u čvorištima sastaju jednakostraničan trokut i po dva dvanaesterokuta.

Time smo riješili prvi slučaj. Dobili smo tri rješenja: (6,6,6), (3,12,12) i (4,8,8). Za $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ zaključivanje ide potpuno analogno.

**2. slučaj:** $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$, $k_2 = 1$

Uvrštavanjem $k_1 = 1$ i $k_2 = 3$ u jednadžbu (5) i sređivanjem dobivamo

$$n_1 = 1 + \frac{3}{n_2 - 3}. \qquad (7)$$

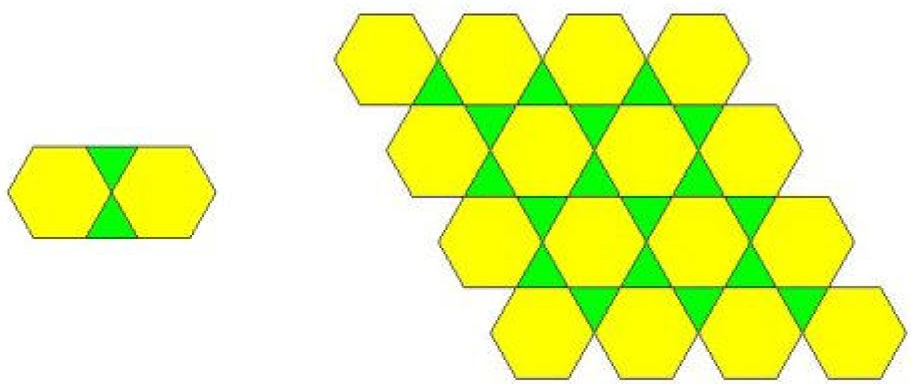
Analognim razmatranjem dobivamo dvije mogućnosti za $n_1$ i $n_2$. To su $n_1 = n_2 = 4$ i $n_1 = 2$, $n_2 = 6$. Drugi slučaj ne zadovoljava uvjet $n_1 \geq 3$ pa za $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ dobivamo samo popločavanje ravnine kvadratima prikazano na slici 2.

**3. slučaj:** $k_1 = 2$, $k_2 = 2$

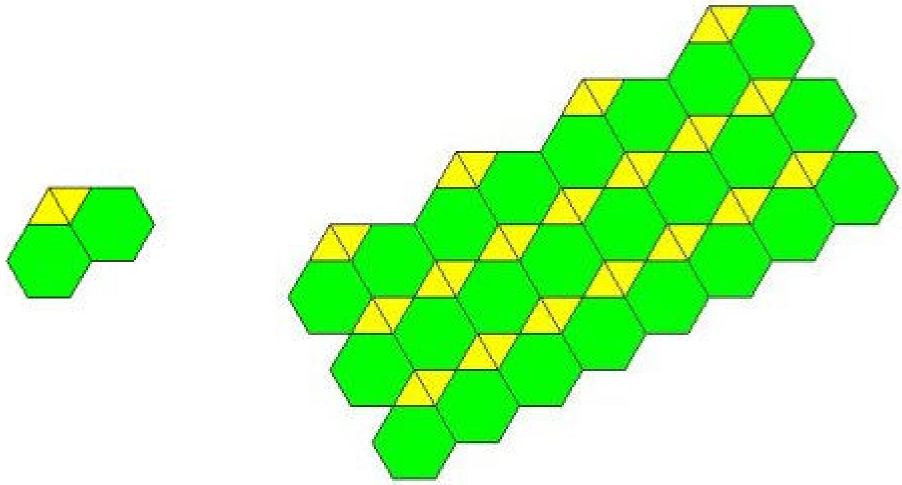
U ovom slučaju dobivamo dvije mogućnosti za $n_1$ i $n_2$ koje zadovoljavaju sve uvjete:

1. $n_1 = 4$, $n_2 = 4$: popločavanje ravnine kvadratima (slika 2);
2. $n_1 = 3$, $n_2 = 6$ ili obrnuto: u čvorištu se sastaju dva jednakostranična trokuta i dva pravilna šesterokuta.

U drugom slučaju trokute i šesterokute možemo rasporediti na dva načina, (3,6,3,6) i (3,3,6,6). Popločavanja su prikazana na slikama 7 i 8. Iako u oba popločavanja nema preklapanja ni praznina, na slici 8 nisu sva čvorišta sukladna pa popločavanje nije Arhimedovo. Dakle, dobili smo samo jedno novo Arhimedovo popločavanje, prikazano na slici 7.



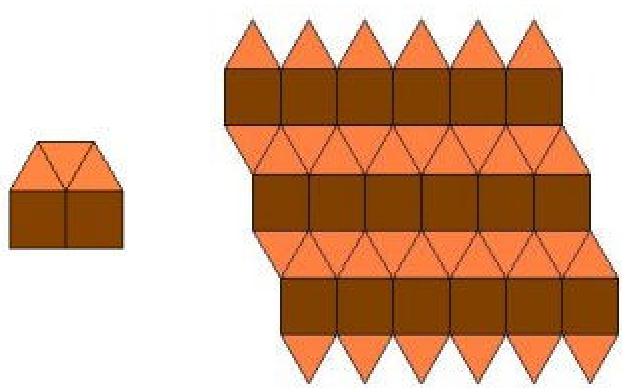
**Slika 7.**



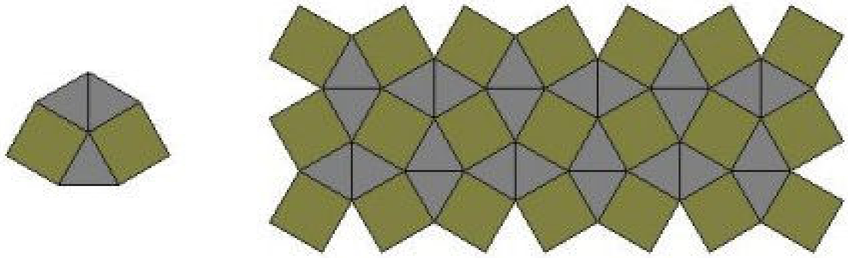
**Slika 8.**

**4. slučaj:** $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$, $k_2 = 3$

Jedino rješenje koje dobivamo u ovom slučaju je popločavanje dvama kvadratima i četirima jednakostraničnim trokutima. No, tu opet imamo dvije mogućnosti: (3,3,3,4,4) i (3,3,4,3,4). Odgovarajuća popločavanja prikazana su na slikama *9* i *10*. Oba zadovoljavaju sve uvjete Arhimedovog popločavanja ravnine.



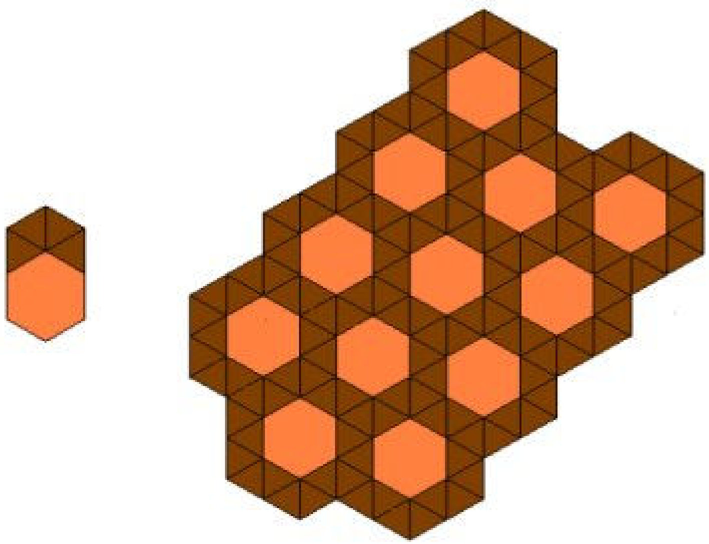
**Slika 9.**



**Slika 10.**

**5. slučaj:** $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ ili $k_1 = 4$, $k_2 = 1$

U ovom slučaju jedino rješenje je $n_1 = 6$, $n_2 = 3$. Radi se o Arhimedovom popločavanju ravnine četirima jednakostraničnim trokutima i jednim pravilnim šesterokutom (slika *11*). Označavamo ga (3,3,3,3,6).



**Slika 11.**

Ovim smo riješili slučaj popločavanja ravnine dvjema različitim vrstama pravilnih mnogokuta. Ostaje još slučaj popločavanja ravnine trima različitim vrstama pravilnih mnogokuta. Neka se u jednom čvorištu sastaje $k_1$ pravilnih $n_1$-terokuta, $k_2$ pravilnih $n_2$-terokuta i $k_3$ pravilnih $n_3$-terokuta. Iz uvjeta da zbroj veličina kutova oko jednog čvorišta iznosi 360° dobivamo diofantsku jednadžbu

$$k_1 \cdot \frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2-2)\cdot 180^\circ}{n_2} + k_3 \cdot \frac{(n_3-2)\cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ, \qquad (8)$$

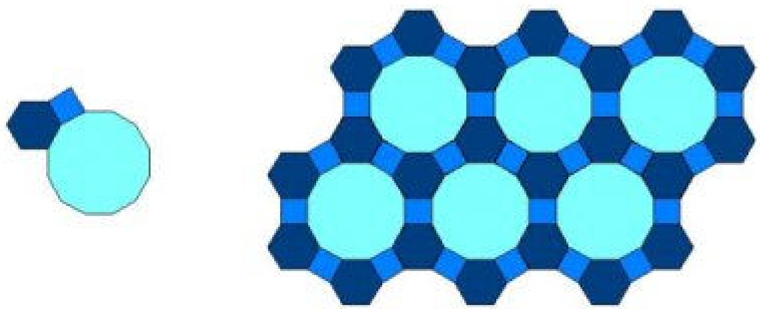
uz uvjete $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, n_3 \geq 3$. Analognim zaključivanjem kao ranije dobijemo uvjet na $k$-ove koji glasi

$$k_1 \cdot (1/2 - 1/n_1) + k_2 \cdot (1/2 - 1/n_2) + k_3 \cdot (1/2 - 1/n_3) = 1. \tag{9}$$

Imamo tri bitno različita rješenja ove diofantske jednadžbe:

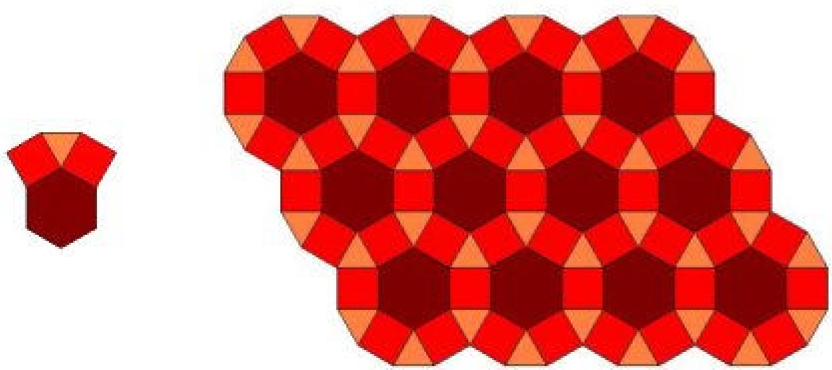
1. $k_1 = k_2 = k_3 = 1$,
2. $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$,
3. $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$.

Uvrštavanjem odgovarajućih $k$-ova u jednadžbu (*9*) dobivamo diofantske jednadžbe, koje rješavamo analogno prethodnim slučajevima. U prvom slučaju dobivamo popločavanje ravnine kvadratom, pravilnim šesterokutom i pravilnim dvanaesterokutom, u oznaci (4,6,12). Prikaz ovog popločavanja dan je na slici *12*.



**Slika 12.**

Rješenje drugog slučaja je popločavanje ravnine jednakostraničnim trokutom, dvama kvadratima i pravilnim šesterokutom u poretku (3,4,6,4) (slika *13*).



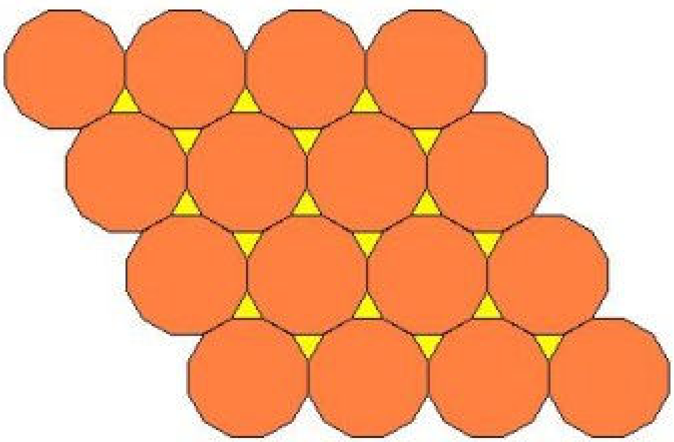
**Slika 13.**

Ostaje nam riješiti još slučaj $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$. Tražimo razdiobe ravnine na tri različite vrste pravilnih mnogokuta. Pretpostavimo da imamo razdiobu na tri jednakostranična trokuta, jedan kvadrat i jedan pravilni peterokut. Tada zbroj veličina kutova oko jednog čvorišta iznosi $3 \cdot 60° + 90° + 108° = 378°$, što je veće od $360°$. Jednakostraničan trokut, kvadrat i pravilni peterokut su pravilni mnogokuti s najmanjom veličinom unutrašnjih kutova. Ako zamijenimo bilo koji od tih triju mnogokuta nekim drugim, tada će zbroj veličina kutova oko čvorišta biti još veći. Zaključujemo da ovaj slučaj nema rješenja.

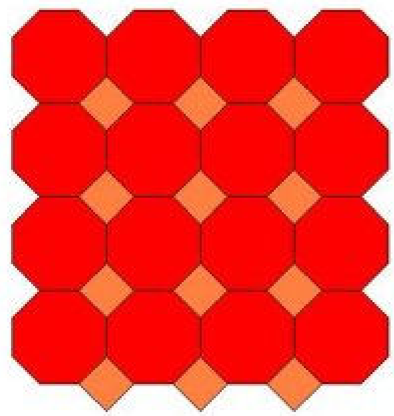
Sada smo iscrpili sve mogućnosti. Dobili smo ukupno osam Arhimedovih popločavanja ravnine i tako dokazali sljedeći teorem.

**Teorem 3.** Postoji ukupno osam Arhimedovih popločavanja ravnine.

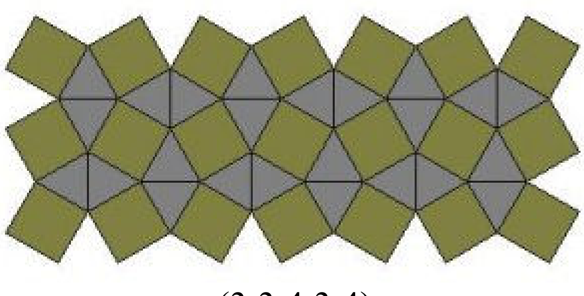
Na kraju još jednom navodimo slike Arhimedovih popločavanja.



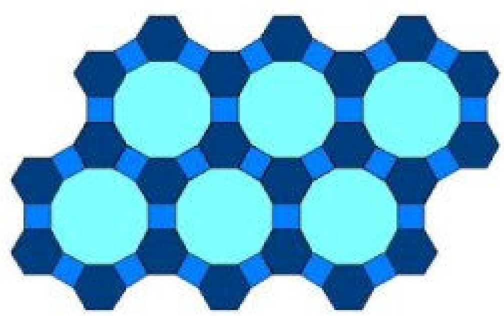
(3,12,12)



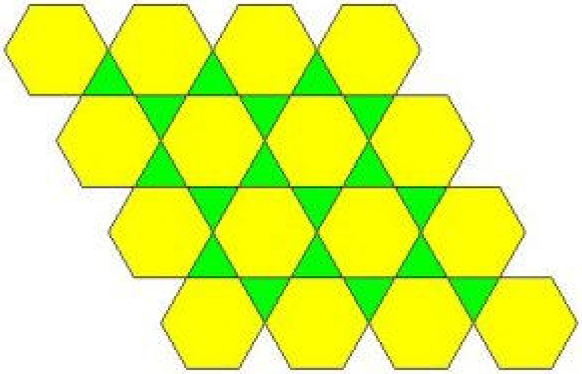
(4,8,8)



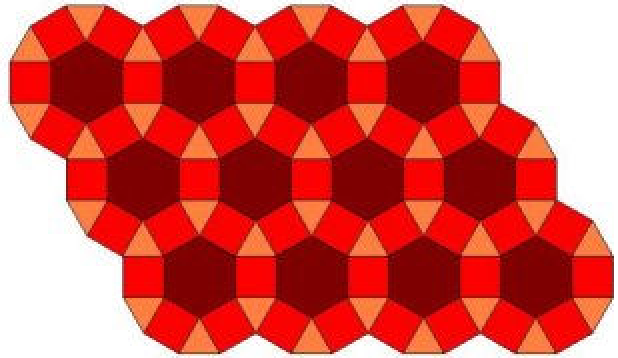
(3,3,4,3,4)



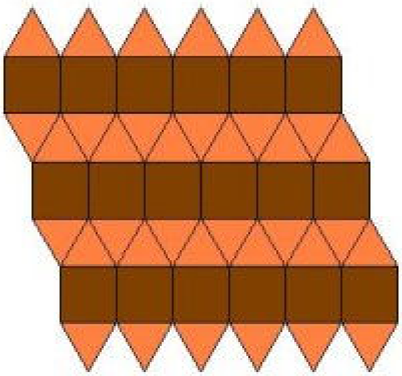
(4,6,12)



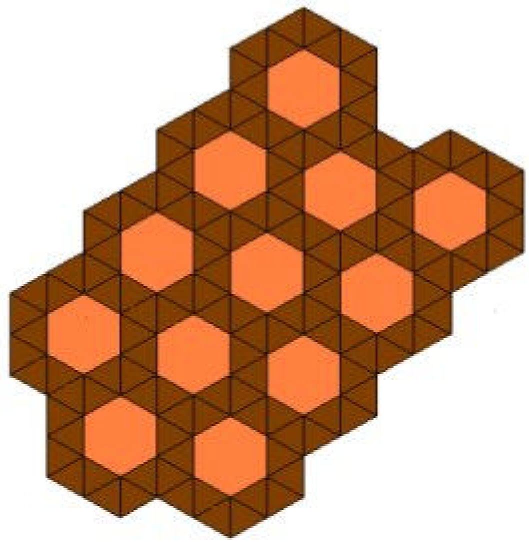
(3,6,3,6)



(3,4,6,4)



(3,3,3,4,4)



(3,3,3,3,6)

## 4. Zaključak

U ovom članku proučavali smo pravilna i Arhimedova popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima. Problem popločavanja ravnine lijep je primjer primjene Descartesove metode, tj. svođenja realnog problema na matematički, točnije geometrijski problem, a njega na algebarski, odnosno na rješavanje diofantske jednadžbe. O primjeni problema popločavanja u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi može se pročitati u diplomskom radu [*KR*]. Tamo je također dan detaljniji dokaz teorema 3, u kojem su do kraja raspisani svi slučaji.

Slike u ovom radu programirane su u programskom jeziku Logo, koji također ima metodičku vrijednost i lijepa je poveznica matematike s nastavom informatike. Programi koji crtaju slike dostupni su *ovdje*. Izrađeni su uz pomoć Logo interpretera *Terrapin Logo*, ali rade i na drugim Logo interpreterima. Jedan besplatan interpreter na kojem ih se može koristiti je *Comenius Logo*.

## Literatura

[*BI*] S. Bilinski, *Problem parketiranja*. Matematičko-fizički list **196** (1999), 194-198.

[*GK*] V. Galešev, I. Kniewald, L. Kralj, G. Sokol, *Informatika 6 - multimedijski priručnik informatike za 6. razred osnovne škole*. SysPrint, Zagreb, 2004.

[*K1*] I. Kniewald, *Logo 4.0*. Alfej, Zagreb, 1999.

[*K2*] I. Kniewald, *Terrapin Logo*. SysPrint, Zagreb, 2005.

[*KO*] A.N. Kolmogorov, *Parketi iz pravilnih mnogokuta*. Matematika i škola **10** (2001), 216-218.

[*KR*] K. Krulić, *Popločavanja ravnine i njihova primjena u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2005.

[*TO*] L.F. Toth, *Reguläre Figuren*. Akademiai Kiado, Budapest, 1965.

[*SR*] S. Sruk, *Simetrično je lijepo*. Matematika i škola **10** (2001), 213-216.

[*W1*] E.W. Weisstein, *Regular Tessellation*. *http://mathworld.wolfram.com/RegularTessellation.html*

[*W2*] E.W. Weisstein, *Tessellation*. *http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html*