Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 9

http://web.math.hr/mathe/

Dokazi i primjene AG nejednakosti

Zrinka Dekanić i Sanja Varošanec

Sadržaj:

1. Aritmetičko-geometrijska nejednakost

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, ili kraće AG nejednakost, svakako je jedna od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Radi se o usporedbi aritmetičke sredine

$$A_n(a,w) = \frac{w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + \ldots + w_n}$$

i geometrijske sredine

$$G_n(a,w) = \left(a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \right)^{1/W_n},$$

pri čemu su $a = (a_1,\ldots,a_n)$ i $w = (w_1,\ldots,w_n)$ uređene n-torke pozitivnih brojeva i $W_n = w_1 + \ldots + w_n$.

Teorem (AG nejednakost).
Ako su a i w uređene n-torke pozitivnih brojeva, tada vrijedi $A_n(a,w) \geq G_n(a,w)$. Jednakost se postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

U literaturi se mogu naći deseci različitih dokaza ove nejednakosti, a mi ćemo promotriti razne vizualne dokaze AG nejednakosti za $n = 2$ s jednakim težinama, tj. razmotrit ćemo dokaze nejednakosti

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad (1)$$

koja vrijedi za svaka dva pozitivna realna broja a i b. Jednakost se postiže ako i samo ako je $a = b$.

2. Dokazi AG nejednakosti

Prvo promotrimo **algebarski dokaz** nejednakosti (1).

Za svaka dva pozitivna broja a i b očito vrijedi nejednakost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$. Kvadriranjem binoma i daljnjim transformacijama dobivamo

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

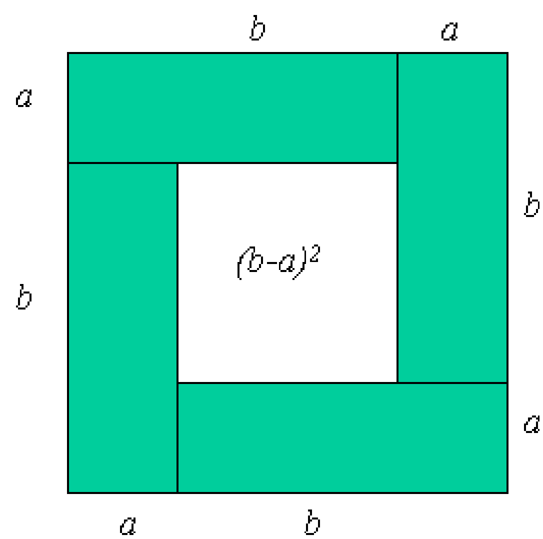
$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

tj.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Promotrimo sada nekoliko **geometrijskih dokaza** nejednakosti (1).

Dokaz 1.



Slika 1.

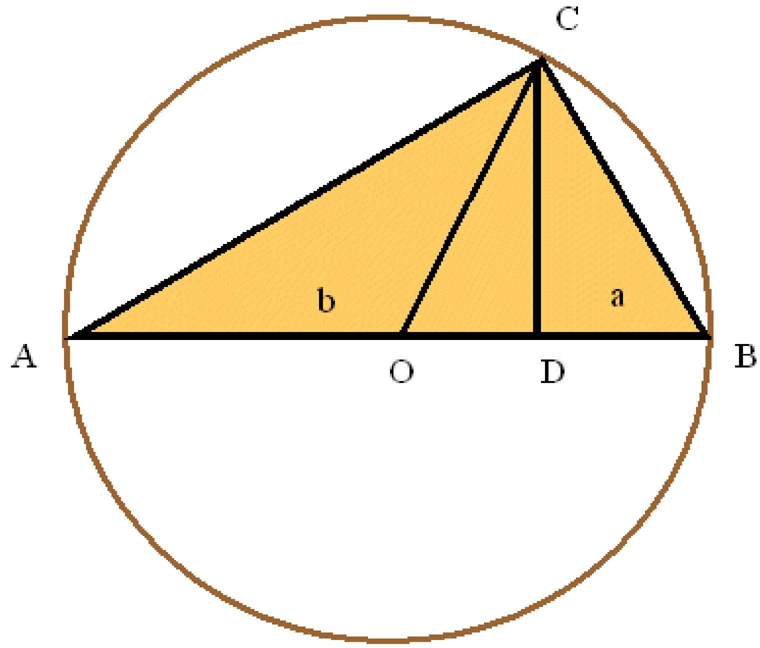
Veći kvadrat ima stranicu duljine $a + b$ i njegova je površina očito veća od površine četiriju pravokutnika sa stranicama a i b (vidjeti sliku 1). Dakle, imamo

$$(a + b)^2 \geq 4ab,$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

odakle slijedi nejednakost (1). Jednakost se postiže ako i samo ako je površina velikog kvadrata jednaka površini četiriju pravokutnika, odnosno ako i samo ako kvadrat u sredini figure iščezava, a to se događa ako i samo ako je $b - a = 0$.

Dokaz 2.



Slika 2.

U pravokutnom trokutu ABC s hipotenuzom AB visina CD dijeli hipotenuzu na odsječke BD i DA duljina a i b (slika 2). Prema Euklidovu poučku, duljina visine na hipotenuzu jednaka je geometrijskoj sredini njenih duljina odsječaka na hipotenuzi, tj. $|CD| = \sqrt{ab}$.

S druge strane, polumjer kružnice opisane pravokutnom trokutu ABC jednak je polovini duljine hipotenuze, tj.

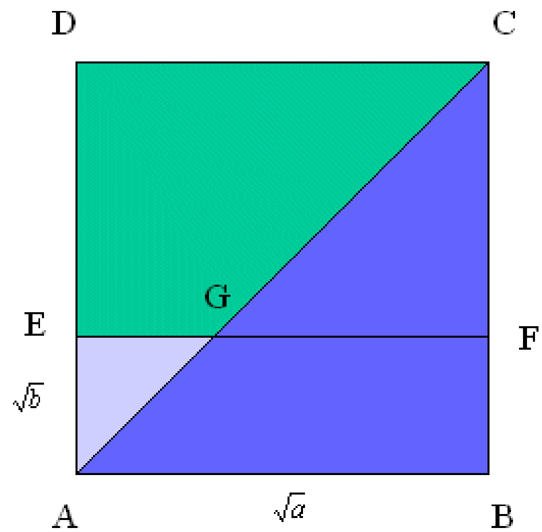
$$|CO| = \frac{a+b}{2}.$$

Budući da je u pravokutnom trokutu COD hipotenuza CO dulja od katete CD, slijedi nejednakost (1). Jednakost se postiže ako i samo ako trokut COD degenerira u dužinu CD, tj. ako i samo ako se težišnica CO podudara s visinom CD. To se događa ako i samo ako je trokut ABC jednakokračan, odnosno ako i samo ako su odsječci visine na hipotenuzi jednake duljine $a = b$.

Dokaz 3.

Kvadrat $ABCD$ ima stranicu duljine $\sqrt{a}$, a pravokutnik $ABFE$ ima stranice duljina $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$, $b \leq a$. Sad imamo

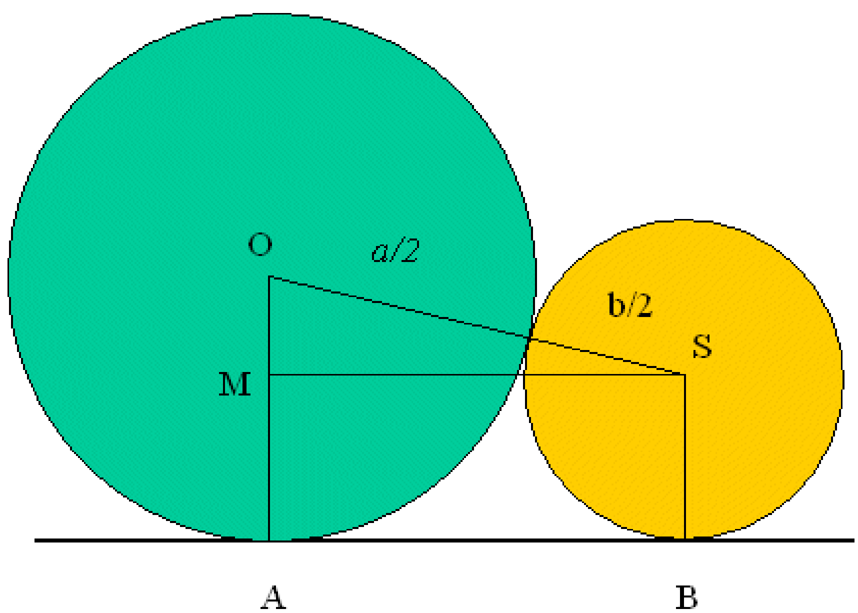
$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \mathrm{P}(ABFE) = \mathrm{P}(AGE) + \mathrm{P}(ABFG) \\ &\leq \mathrm{P}(AGE) + \mathrm{P}(ABC) \\ &= \frac{b}{2} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$



Slika 3.

Time je ponovno dokazana AG nejednakost (1).

Dokaz 4.



Slika 4.

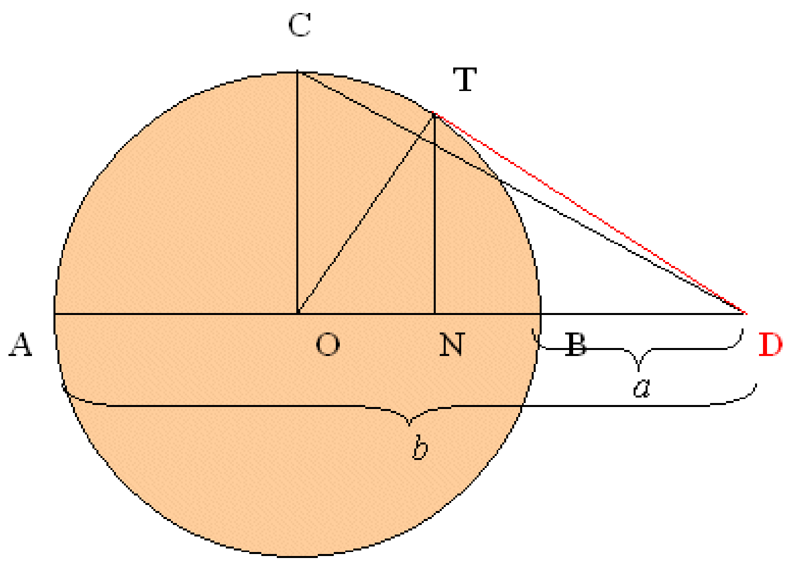
Neka su dane kružnice središta O i S te polumjera $a/2$ i $b/2$, $a \geq b$, koje se diraju izvana, te neka je AB zajednička vanjska tangenta tih dviju kružnica. Točke A i B su dirališta tangente i kružnica. Trapez $ABSO$ ima dva prava kuta pri vrhovima A i B. Neka je dužina SM paralelna s AB. Tada je trokut OMS pravokutan.

Hipotenuza OS ima duljinu $(a+b)/2$, a kateta OM ima duljinu $(a-b)/2$. Prema Pitagorinu poučku imamo

$$|SM| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Budući da je u pravokutnom trokutu hipotenuza dulja od katete, slijedi valjanost nejednakosti (1).

Dokaz 5.



Slika 5.

Neka je dana kružnica s promjerom AB duljine $b - a$ i središtem O. Točka D nalazi se na pravcu kroz A i B tako da je $|AD| = b$ i točka B je između točaka A i D. Tada je $|BD| = a$. Iz točke D povučena je tangenta na kružnicu. Točka T je diralište te tangente i kružnice. U pravokutnom trokutu OTD hipotenuza ima duljinu $|OD| = (a+b)/2$, a duljinu katete TD možemo izračunati pomoću Pitagorina poučka:

$$|TD| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Budući da je hipotenuza dulja od katete, vrijedi AG nejednakost (1).

Inače, na ovoj slici pojavljuje se nejednakost još dviju sredina: kvadratne i harmonijske. Naime, ako je CO polumjer okomit na promjer AB, tada duljina hipotenuze CD iznosi

$$|CD| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Ovaj se izraz naziva **kvadratnom sredinom** brojeva a i b. Nadalje, ako je N nožište visine iz vrha T u pravokutnom trokutu OTD, tada iz sličnosti trokuta TND i OTD slijedi $|ND| : |TD| =$

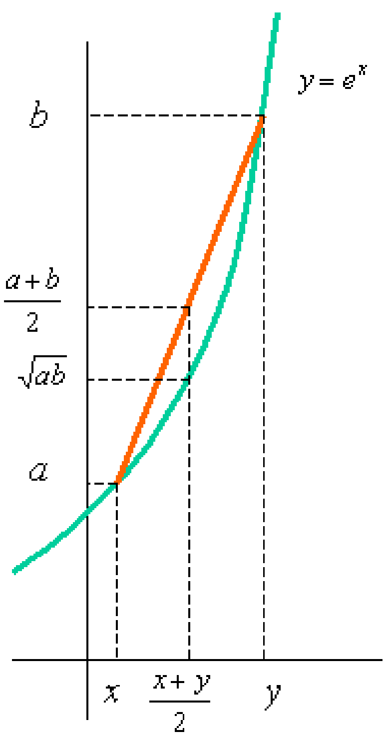
$|TD| : |OD|$, tj.

$$|ND| = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ovaj se izraz naziva **harmonijskom sredinom** brojeva a i b. Iz slike 5 očitavamo da je $|ND| < |TD| < |OD| < |CD|$, tj. sredine rastu ovim slijedom: harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna. Ova se činjenica generalizira na sredine definirane pomoću opće potencije, ali to prelazi okvire ovog rada.

Sljedeća dva dokaza pripadaju grupi tzv. **analitičkih dokaza** AG nejednakosti.

Dokaz 6.



Slika 6.

Funkcija $f(x) = e^x$ je **konveksna**, što geometrijski znači da je graf funkcije između dviju točaka na grafu uvijek ispod tetive koja spaja te dvije točke. Na grafu eksponencijalne funkcije odaberimo dvije točke s koordinatama (x,e^x) i (y,e^y) te uvedimo oznake $a = e^x$ i $b = e^y$.

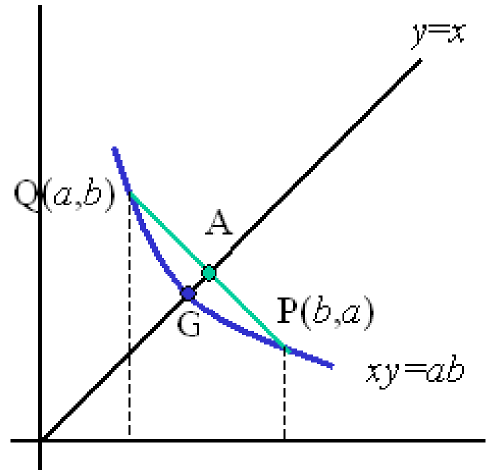
Pravac kroz odabrane točke ima jednadžbu

$$Y - b = \frac{b-a}{y-x}(X-y),$$

pa točka na tom pravcu s apscisom $(x + y)/2$ ima ordinatu $(a + b)/2$. S druge strane, točka s istom apscisom, ali na grafu eksponencijalne funkcije ima ordinatu $e^{(x+y)/2}$, što nakon sređivanja postaje $\sqrt{ab}$. Budući da se točka na grafu nalazi ispod točke na tetivi, slijedi AG nejednakost

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Dokaz 7.



Slika 7.

Promotrimo hiperbolu $x \cdot y = ab$. Točke $P(b,a)$ i $Q(a,b)$ pripadaju toj hiperboli. Pravac koji prolazi kroz te dvije točke ima jednadžbu

$$y = -x + (a+b).$$

Promotrimo sad presjek hiperbole i tetive PQ s pravcem $y = x$. Na hiperboli je presjek točka G s koordinatama

$$G\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\right),$$

a na tetivi točka A s koordinatama

$$A\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Budući da je točka G ispod točke A (zbog konveksnosti funkcije čija je hiperbola graf), slijedi AG nejednakost.

3. Primjene AG nejednakosti

AG nejednakost je snažno sredstvo za dokazivanje raznih složenijih nejednakosti i u literaturi se mogu naći brojni zadaci koji se svode na upotrebu ove nejednakosti. U sljedećih nekoliko primjera pokazat ćemo neke primjene opće AG nejednakosti.

Primjer 1: Maksimum polinoma.

Ako je L površina sferne kapice danog polumjera R i V volumen odgovarajućeg sfernog odsječka, tada vrijedi $18\pi V^2 \leq L^3$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je riječ o polusferi.

Dokaz. Koristeći poznate formule za površinu sferne kapice $L = 2\pi Rh$ i volumen sfernog odsječka $V = \pi h^2(3R-h)/3$ dobivamo omjer

$$\frac{V^2}{L^3} = \frac{h\,(3R-h)^2}{72\pi R^3}.$$

Nađimo maksimum polinoma $h\,(3R-h)^2$ za $h \in [0,R]$. Napišimo AG nejednakost za tri broja C_1h, $C_2(3R-h)$ i $C_2(3R-h)$, pri čemu su C_1 i C_2 neodređeni koeficijenti:

$$C_1h\, C_2^2(3R-h)^2 \leq \left(\frac{C_1h + 2C_2(3R-h)}{3}\right)^3.$$

Koeficijente C_1 i C_2 odredimo tako da u aritmetičkoj sredini na desnoj strani nejednakosti nestane varijabla h. Dobivena konstanta na desnoj strani bit će maksimum polinoma na lijevoj strani ako postoji h_0 za koji se postiže jednakost.

Varijabla h nestat će ako vrijedi $C_1-2C_2 = 0$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $C_1 = 2$ i $C_2 = 1$. Jednakost u AG nejednakosti postiže se ako su brojevi jednaki, tj. ako vrijedi $C_1h = C_2(3R-h)$, odakle dobivamo da je $h_0 = R$. Uvrštavanjem koeficijenata C_1 i C_2 u AG nejednakost dobivamo $2h(3R-h)^2 \leq 8R^3$, tj. $h(3R-h)^2 \leq 4R^3$. Dakle, vrijedi

$$\frac{V^2}{L^3} \leq \frac{1}{18\pi}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je visina kapice jednaka polumjeru (tj. kapica je u stvari polusfera).

Ova metoda s uvođenjem neodređenih koeficijenata i korištenjem AG nejednakosti može se generalizirati za opću situaciju određivanja maksimuma polinoma koji je dan u obliku produkta.

Primjer 2: Limes.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $n \geq 3$. Tada koristeći AG nejednakost za n brojeva $1, n^{1/n}, n^{2/n}, \ldots, n^{(n-1)/n}$ imamo

$$\begin{aligned} 0 \leq n^{1/n} - 1 &= \frac{n-1}{1 + n^{1/n} + \ldots + n^{(n-1)/n}} \\ &\leq \frac{n-1}{n\left(n^{1/n + 2/n + \ldots + (n-1)/n}\right)^{1/n}} \\ &= \frac{n-1}{n^{(3n-1)/(2n)}} \leq \frac{1}{n^{1/3}}. \end{aligned}$$

Budući da $n^{-1/3}$ teži k 0 kada n teži u beskonačnost, slijedi da tada i $n^{1/n} - 1$ teži k 0.

Primjer 3: Hölderova nejednakost.

Neka su a i b dvije n-torke pozitivnih realnih brojeva te neka su p i q dva pozitivna broja takva da je $1/p + 1/q = 1$. Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \Big)^{1/q}.$$

Dokaz. Gornja nejednakost može se napisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k^p}{\sum_i a_i^p} \Big)^{1/p} \Big(\frac{b_k^q}{\sum_i b_i^q} \Big)^{1/q} \le 1,$$

a ta se nejednakost dokazuje koristeći težinsku AG nejednakost za dva broja:

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k^p}{\sum_i a_i^p} \Big)^{1/p} \Big(\frac{b_k^q}{\sum_i b_i^q} \Big)^{1/q} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{p} \cdot \frac{a_k^p}{\sum_i a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_k^q}{\sum_i b_i^q} \Big) =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
