Samoopisujući niz

Ivan Gavran

Nastavite niz. . .

Možete li nastaviti sljedeće nizove:
$1, 2, 4, 8\ldots$
$1, 2, 4, 7, 11, 16\ldots$
$5, 6, 10, 19, 35\ldots$
$1, 1, 2, 3, 5, 8\ldots$
Ova četiri niza često se pojavljuju u raznim novinskim kvizovima, testovima inteligencije i vjerojatno ste lako shvatili po kojoj se zakonitosti niz gradi dalje. U zadnjem nizu, koji je poznat kao *Fibonaccijev niz*, sljedeći broj u nizu je zbroj prethodna dva člana.

Niz koji se sam opisuje. . .

Možete li nastaviti ovaj niz? *Kako bi glasio jedanaesti red?*

$$1$$
$$1, 1$$
$$2, 1$$
$$1, 2, 1, 1$$
$$1, 1, 1, 2, 2, 1$$
$$3, 1, 2, 2, 1, 1$$
$$1, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 1$$
$$1, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 1$$
$$3, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 1$$
$$1, 3, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 1$$
$$1, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 1$$

Samoopisujući niz, kako mu ime kaže, opisuje samog sebe.
U PRVOM RETKU je jedna(1) jedinica(1) i to pišemo 1,1,
u DRUGOM RETKU su dvije(2) jedinice(1) i to pišemo 2,1,. . .
Imate li sada ideju kako nastaviti? Svaki redak niza brojevima opisuje prethodni. Drugi redak opisuje prvi (prvi redak zadan je kao jedinica) brojevima 1, 1 (čita se jedna jedinica). Na isti način treći redak opisuje drugi (dvije jedinice). Zamisao o samoopisujućem nizu prvi je iznio njemački matematičar **Martin Hilgemeier** 1986. godine u članku ,,*Die Gleichniszahlen-Reihe*''(*njem.* DAS GLEICHNIS – **slikovita priča**, DIE ZAHLEN-REIHE – **niz brojeva**).[1]

[1] Na engleskom se samoopisujući niz zove ***look and say sequence***, što bi doslovno prevedeno značilo *,,reci što vidiš''*.

Neka svojstva samoopisujućeg niza

Hoće li se u nekom retku niza ***pojaviti bilo koji drugi broj osim 1, 2 i 3?***
Budući da niz počinje jedinicom, broj četiri (ili više) prvi bi se put mogao pojaviti samo nakon što bi u prethodnom retku zaredom bile napisane četiri jedinice, dvojke ili trojke.

Lako se uoči da je neparno mjesto u svakom retku ono koje kaže *,,koliko"* a parno mjesto je ono koje kaže *,,čega"*. Zato se nikada neće dogoditi da dvije iste znamenke budu na dva uzastopna parna mjesta u retku (jer se u jednom paru brojeva opisuje ukupan broj istih znamenki). Zato bi se umjesto k, k, k, k pisalo $4, k$. Iz toga slijedi zaključak da se prva četvorka nikada i ne može pojaviti.

Pokušajte sami vidjeti što vrijedi ako niz ne počinje jedinicom nego bilo kojim drugim prirodnim brojem.

Hoće li se ikada, u bilo kojem retku, ***pojaviti 3, 3, 3?***
Uz sličnu argumentaciju kao u odgovoru na prethodno pitanje: ako se 3, 3, 3 pojavljuju u n-tom članu, tada se pojavljuje i u $n-1$-om članu. Ako se pojavljuje u $n-1$-om, pojavljuje se i u $n-2$-om, $n-3$-em. . . 3-em, 2-om, 1-om članu. 333 se nikada ne će pojaviti jer se ne pojavljuje u prvom članu. (Zanimljivo je da Hilgemeier nije dao odgovor na ovo pitanje). Pokušajte se sami pozabaviti ovim pitanjem: *ako bi niz počeo bilo kojom kombinacijom trojki, dvojki i jedinica, tako da nigdje nisu više od tri dvojke ili jedinice zaredom i više od dvije trojke zaredom, može li ta zakonitost nužno vrijediti i za sljedeće retke?*

Naprijed i nazad

Nakon što vidite jedan (bilo koji) redak samoopisujućeg niza lako ćete odrediti njegov sljedbenik, ali i prethodnik. Postavlja se pitanje: Je li moguće ići unatrag od bilo kojeg zadanog retka s parnim brojem znamenaka koji poštuje ranije utvrđena pravila samoopisujućeg niza? Odgovor na ovo pitanje jest *NE*. Pokušajte se vratiti unatrag od ovog retka:

122111

Čitam što je opisivao ovaj redak i pišem:

Jedna dvojka, dvije jedinice, jedna jedinica $-$ 2, 1, 1, 1.

Ali, kad bih od toga pokušao stvoriti sljedbenika, dobivam:jedna dvojka, tri jedinice $-$ 1, 2, 3, 1.

Poopćeno:

- nemoguće je vratiti se unazad ako postoje **tri dvojke** ili **jedinice**, a prva od njih na parnom je mjestu u retku
- nemoguće je vratiti se unazad ako postoje **dvije trojke**, a prva od njih na neparnom je mjestu u retku

Broj znamenaka

Kako se povećava broj znamenaka iz retka u redak i koliki je broj znamenaka u n-tom retku?
Lako je primijetiti da broj znamenaka u svakom sljedećem retku nikad ne će biti **manji** ni više od **dvostruko veći**. (Kad će biti jednak broju znamenaka iz prethodnog retka, a kad dvostruko veći?) Pomoću algoritam koji se lako napravi, možemo izračunati broj znamenaka u n-tom retku. Tako se, na primjer, u dvadeset sedmom retku nalazi **1000** jedinica, **636** dvojki i **376** trojki. Hilgemeier je otkrio da broj članova u svakom sljedećem retku raste prosječno **1.3** puta. Preciznije matematičko objašnjenje dao je **John Conway**, koji je izračunao da broj članova raste 1.303577. . . puta (detaljnije na `www.mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html`).

Za kraj, par tema za razmišljanje čitatelju:

- Što ako niz ne počinje jedinicom nego bilo kojom drugom znamenkom?
- Pokušajte poopćiti nekoliko sljedećih redaka.
- Što ako niz počinje skupinom znamenaka, bilo kako odabranih?