

Dr. sc. Dominika Crnjac Milić
Elektrotehnički fakultet u Osijeku

Mr. sc. Ljiljanka Kvesić
Srednja strukovna škola Široki Brijeg

UDK 330.4
Pregledni članak

HEURISTIČKE METODE CJELOBROJNOG PROGRAMIRANJA I NJIHOVE APLIKACIJE U EKONOMIJI

SAŽETAK

U uvodu se daje kratak pregled poznatih rezultata vezanih uz cjelobrojno programiranje i navodi literatura koja to područje obrađuje.

U glavnom dijelu rada analizira se Heuristička metoda koja daje vrlo brz rezultat bez upotrebe nekog značajnijeg matematičkog alata.

KEY WORDS

programiranje, odlučivanje, cjelobrojno programiranje, optimum, algoritam

1. Uvod

Važnost cjelobrojnog programiranja jest u rješavanju praktičnih problema. Gotovo da i nema područja u kojemu se cjelobrojno programiranje ne bi moglo primijeniti. Najčešća su područja primjene područje industrije i područje ekonomije, ali i vojno područje, gdje je primjena u izboru i razmještanju sredstava naoružanja.

U svakoj organizaciji nailazimo na proces odlučivanja koji određuje korištenje dodijeljenih sredstava organizacije. Sveučilište mora donijeti odluku o načinu korištenja fakulteta, knjižnica, kompjutera i zgrada. Korporacija mora odlučiti kako će rasporediti proizvodna sredstva, raspored zaposlenika na poslove i koje proizvode u kojim količinama treba proizvoditi. Promotrimo situaciju u kojoj autostopist mora odlučivati o raznim predmetima koje bi mogao ponijeti uz ograničenje da ne može nositi više od određene težine. Njegov je cilj maksimizirati totalnu vrijednost predmeta koje nosi. Taj problem je poznat kao problem ruksaka. Promotrimo problem isporučivanja narudžbi iz skladišta na m različitih odredišta, koja narudžbu primaju u jednoj isporuci. Dostavljač može kombinirati najviše k narudžbi koje mora isporučiti istovremeno. Određivanje dopustive kombinacije ovisi o ruti dodijeljenoj svakom dostavljaču. Jer odredišta mogu pasti na više od jedne rute, postoje alternative kao što je koji dostavljač treba isporučiti narudžbu...

Kao cjelobrojno programiranje javlja se i problem fiksnih troškova [1]. Oni nastaju čim varijabla poprimi vrijednosti različite od nule, a kad je vrijednost varijable jednaka nuli, nastaju i fiksni troškovi. To mogu biti problemi proizvodnje. Kod proizvodnje svakog proizvoda nastaju fiksni troškovi, ali i ako se ti proizvodi uopće ne proizvode, ipak postoje ukupni fiksni troškovi. Postavlja se pitanje, koji je to program proizvodnje koji ostvaruje maksimalnu dobit.

Cjelobrojnost se javlja također i kod investicijskih problema kada je potrebno instalirati veći broj strojeva. Isto tako taj se uvjet postavlja kada je potrebno neke radnike razmjestiti na odgovarajuće strojeve. Problemi montaže mogu se shvatiti kao modeli s uvjetom cjelobrojnosti u kojima postoje

relacije između gotovih proizvoda, grupe proizvoda koje treba ugraditi i pojedinačnih dijelova. Najrealističniji problemi u proizvodnji često su veliki i složeni, što ih čini gotovo nemogućim za rješavanje. Zbog toga se često originalni problemi razlažu na potprobleme (vidi primjerice [2]). Proučavanjem neke proizvodnje i proizvodne okoline, uočava se posebna klasa proizvodnih problema koji se svaki zasebno rješavaju i na kraju uklapaju u cjelinu, koja daje konačno rješenje.

Poznate su primjene kod raspoređivanja osoblja, raspodjele zadataka, izbora lokacija i sredstava (vidi primjerice [3], [4]). Problem raspodjele poslova za strojeve možemo ovako formulirati. Stroj mora izvesti $n (\geq 2)$ poslova. Vrijeme rada za posao i je p_i (min). Nakon svakog posla stroj se mora prirediti kako bi se osposobio za sljedeći posao. Neka to vrijeme za podešavanje s posla i na posao j bude c_{ij} (min). Nakon izvršenja svih poslova stroj moramo postaviti u početnu poziciju. Vrijeme podešavanja od početne situacije do posla i je c_{oi} (min), i od posla j do početne pozicije c_{oj} (min). Problem se sastoji u tome, kako raspodijeliti poslove tako da vrijeme rada svih poslova bude minimalno. Budući da svi poslovi moraju biti napravljeni na jednom stroju, vrijeme rada ovisi samo o vremenu podešavanja tako da zbroj svih korištenih vremena podešavanja treba biti minimiziran.

Vrlo je često područje primjene cjelobrojnog programiranja transport. Transport je jedna od najvitalnijih usluga u modernom društvu. Osnova je za mnoge druge funkcije društva, kao što su proizvodnja i izgradnja, prehrambena i poljoprivredna industrija, dostava i distribucija energenata, dostupnost medicinske njege i turizam (vidi primjerice [5]). Prvi takav problem izrastao je iz želje jedne naftne kompanije da bolje organizira regionalni vozni park kamiona i vozače. U budućnosti za postizanje opće dobrobiti, ekonomskog rasta i stabilnosti, transportni programi i fizički sistemi morat će biti osmišljeni i napravljeni kako bi osigurali brz, siguran, efikasan i dostupan transport po najnižoj cijeni.

Cjelobrojno programiranje može se primijeniti i na dostupnost različitih investicijskih projekata pod uvjetom fiksnog budžeta. To možemo vidjeti u primjeru navedenom u [6]. Mliječna korporacija

"Cheemi" i proizvodi, osim mlijeka, uglavnom sir. Dio transporta mlijeka i sira vrši sama kompanija, preostali dio ide na bordažu. Središnji vozni park "Cheemi"-a je zastario i mora biti obnovljen. "Cheemi" može birati između dvije vrste novih vozila. S tipom A može se prevoziti samo sir do maksimalno 100(x100kg), a s tipom B mogu se prevoziti i sir i mlijeko do maksimalno 50(x100kg) sira i 20(x100l) mlijeka. Kupnjom vozila tipa A štedi se 1000(x1\$) mjesečno nasuprot distribuciji istovarom, za tip B ušteđa je 700(x1\$) mjesečno. Točnije "Cheemi" želi uštedati uštede.

Novo područje o kojemu se još raspravlja jest medicinski problem. Problem raspodjele organa za transplantaciju navodi se u [7]. Cilj je politika koja raspoređuje organe efikasno, jednako na način da maksimizira potencijalno nabavljanje organa. Osim toga, svrha je veće preživljavanje pacijenata i organa korištenih u transplantaciji. Zahtijeva se jednakost na svim područjima, bilo nacionalnost, bilo položaj regije. Boljim programom jasno je naznačen cilj povećavanja broja donacija organa i smanjenja cijene za pribavljača i pacijenta.

Otkriva se sve više novih područja primjene koja ujedno utječu na razvoj cjelobrojnog programiranja. Jedno od takvih područja je i internet koji omogućuje multimedijalne komunikacije, ali i cjelobrojno programiranje tu može naći svoju primjenu. Efikasno korištenje, za svrhe cjelobrojnog programiranja, ovih tehnoloških inovacija uključuje inovacije, promjene i veće uključivanje organizacija koje se bave cjelobrojnim programiranjem. Dobar primjer je Web-bazirana OR biblioteka podataka, koja predstavlja sve prikladniju alternativu.

2. Heurističke metode

Sve poznate egzaktne metode cjelobrojnog programiranja su elegantne, ali spore. Zato su za rješavanje većih problema u praksi samo uvjetno pogodne. Veću prednost imaju heurističke metode. One trebaju manje vremena za računanje i s velikom vjerojatnošću vode do optimalnog rješenja, ili bar do onoga koje je blizu optimalnom.

Jedna od metoda počinje s koordinatnim ishodištem (ili iz neke druge cjelobrojne točke, po

mogućnosti da točka ne bude u kutu dopuštenog područja). Malim cjelobrojnim koracima u smjeru koordinata pokušava se približiti optimumu. Izbor pravca vrši se po kriteriju "najveće promjene". U svakom se koraku određuje najprije za svaku varijablu x_j umnožak koeficijentata funkcije cilja s najmanje negativnim cjelobrojnim kvocijentom elemenata desne strane i koeficijentom promatrane varijable. Varijablu koja ima apsolutno najveći (negativni) umnožak (najveća promjena) povećava se za jedan cjelobrojni iznos, najmanje za 1. Pritom se mijenjaju desne strane jednadžbe.

Male duljine koraka (zbog toga se radi o "opreznom približavanju"). Kod malih koraka postoji relativno visoka sigurnost da se dođe do točke "ispod optimuma". Mali koraci sprječavaju da se metoda u ranijoj fazi ne zaplete u jednom neoptimalnom kutu, iz kojeg nema izlaza.

Metoda koja vodi do uspjeha u mnogim primjerima ne oslanja se na male, već na velike korake. Najprije se koriste samo koraci u smjeru koordinata. Kad takvi koraci više nisu uspješni, pokušava se promjenom dvije, tri ili eventualno više varijabli, i to istodobno.

Metode se mogu kombinirati. Može se preporučiti da se počne s metodom "opreznog približavanja", jer se time sprječava prerano dolaženje u neoptimalnu kutnu točku.

Ove metode približnog rješavanja pobuđuju interes jer se najčešće dobiva rješenje koje se može koristiti i koje je blizu optimalnom rješenju.

Prednost im je u brzem vremenu računanja, a nedostatak da ne pronalaze uvijek optimalno rješenje.

Prikazat ćemo heuristički pristup problemu trgovačkog putnika. Problem je sljedeći. Trgovački putnik mora po jednom posjetiti svaki od n gradova prije povratka kući. Zna udaljenosti između gradova i želi minimizirati ukupni prijeđeni put. Kojim redom treba obilaziti gradove? U principu taj problem rješavamo metodom grananja i ograđivanja kombinirano s metodom odsijecanja ravnina, vrijeme potrebno za pronalaženje optimalnog rješenja može rasti eksponencijalno kako se broj gradova n povećava. To je idealna situacija za isprobavanje heurističke metode. U ovom ćemo radu analizirati

dva tipa heurističke metode za problem trgovačkog putnika: onaj koji oblikuje putovanje od početne točke i onaj koji poboljšava prethodno dobiveno rješenje.

a) Heuristička metoda oblikovanja putovanja

- › **Najbliži susjed:** početni grad je odabran slučajno i onda se putovanje oblikuje kretanjem od važećega grada prema najbližem gradu koji još nije bio posjećen. Kada se dođe do posljednjega grada, put se vraća do početnoga grada, i time se završava putovanje.
- › **Najbliže uvrštavanje:** ova heuristička metoda započinje putovanje posjetom dvaju gradova koji su međusobno vrlo blizu. Tada se ostali gradovi uvrštavaju jedan po jedan uklanjanjem jednog od rubova postojećeg putovanja i povezivanjem novoga grada između dva kraja. Idući grad koji treba uvrstiti u svakom koraku odabire se tako da najmanje povećava dužinu putovanja.
- › **Najdalje uvrštavanje:** ova heuristička metoda započinje putovanje posjetom dvaju gradova koji su međusobno najviše udaljeni. Idući grad koji se uvrštava jest onaj koji najviše povećava dužinu važećeg putovanja kada se ovaj grad uvrsti na najbolju poziciju u važećem putovanju. Princip iza heurističke metode najdaljeg uvrštavanja jest taj da će neki gradovi biti skupi za uvrštavanje i mogli bi rano bankrotirati jer svi gradovi moraju biti posječeni.
- › **Okret:** ova heuristička metoda određuje središte mape i onda rotira polulinijom oko tog središta. Gradovi se posjećuju redom po kojemu su bili na putu okretanja oko središnje točke. Ovo je jedina metoda heurističkog oblikovanja putovanja koja osigurava nepresijecanje točaka putovanja koje je planirano.

b) Heuristička metoda poboljšanja putovanja

- › **Dvije mogućnosti:** ova heuristička metoda sistematično promatra svaki par rubova koji nisu blizu važećem putovanju i odlučuje da li će se dužina putovanja smanjiti uklanjanjem ovih dvaju rubova i dodavanjem drugih mogućih parova rubova koji će utjecati na putovanje. Ako je tako, izmjena se obavlja i potraga za unaprjeđujućim parom rubova se nastavlja. Ovo će rezultirati

putovanjem čije se točke neće sjeći u ravnini. Putu koji se ne presijeca često se smanjuje dužina ovom heurističkom metodom.

- › **Tri-mogućnosti:** slična je heurističkoj metodi dvije-mogućnosti, osim što se sada tri ruba uklanjaju i rezultirajući segmenti stabla putovanja i rekombinira da oblikuje putovanje.
- › **Lin-Kernighan:** ovo je snažna izmjenjiva heuristička metoda koja se provodi kako slijedi. Rub se uklanja iz važećeg putovanja, tako da se daje put. Tada se jedan kraj ovog puta pridružuje nekom unutrašnjem čvoru i rub se uklanja, s tim da daje novi put. Ova se operacija dodavanja/uklanjanja

		Posao		
		1	2	3
Osoba	A	1	3	4
	B	3	7	4
	C	3	4	2

ponavlja. Neka je dobivena suma dužina uklonjenih rubova (osim zadnjeg) manje suma dužina dodanih rubova. Operacija dodavanja/uklanjanja nastavlja se sve dok je dobivena suma pozitivna i da još ostaje nedodanih/neuklonjenih rubova. Za svaki put konstruiran, cijena putovanja postignuta sjedinjavanjem krajnjih točaka se računa i ako je manja od originalnog putovanja, ne gubimo iz vida unaprjeđena rješenja. Tada kad je niz mogućih međupromjena iscrpljen, ako je postignut bilo kakav napredak, najbolji put nađen zamjenjuje originalno putovanje i postupak se nastavlja.

Navest ćemo jedan primjer kada nije cilj optimalno rješenje: zbog veličine problema koje želimo riješiti, a koje je preko mogućnosti vremena računanja optimalnog algoritma unutar mogućeg računarskog vremena ili možemo optimalno riješiti, ali mislimo da nije vrijedno truda (vremena, novca, itd.) koje bismo uložili u pronalaženju optimalnog rješenja.

Primjer

Promotrimo sljedeći problem: 3 osobe treba dodijeliti na tri posla, a cijena dodjeljivanja dana je u dolje danoj matrici:

Samo jedna osoba može biti dodijeljena na jedan posao i sve osobe trebaju biti zaposlene. Ovaj problem nazivamo problem asignacije.

Treba naglasiti da bi heuristički algoritam trebao biti primjenjiv za problem čak i ako se cijene u gornjoj matrici promjene (tj. Heuristički algoritam je skup osnovnih pravila za rješavanje problema, i nezavisan od pojedinih slučajeva koji se razmatraju).

Jednostavna heuristička metoda za problem dodjeljivanja bila bi: odaberi čovjeka i posao slučajno. Dodijeli odabranu osobu odabranom poslu iz problema i ponovi to s novim (manjim) problemom. Ova heuristička metoda ne koristi informacije o cijenama i zbog toga ne očekujemo da dobijemo dobre rezultate.

Bolja heuristička metoda bila bi: odaberi najmanju cijenu u matrici cijena i dodijeli odgovarajuću osobu na odgovarajući posao – uklonite je iz problema i ponovite korak na novom (manjem) problemu.

Ova heuristička metoda daje rješenje:

- » Cijena 1 Dodijeli A na posao 1
- » Cijena 2 Dodijeli C na posao 3
- » Cijena 7 Dodijeli B na posao 2

Ukupna cijena je 10.

Ovo ilustrira problem koji se često pojavljuje kod heurističkih metoda kada smo kod trećeg dodjeljivanja (B na posao 2) stjerani u kut prethodnim dodjeljivanjima i gotovo da nema izbora (što je rezultiralo dodjeljivanjem B na posao 2 po relativno visokoj cijeni).

Zbog ovog problema česta ideja u heurističkim metodama je koncept zamjene – osnovna ideja je mijenjati važeće rješenje kako bi vidjeli možemo li ga poboljšati. Prethodno rješenje možemo poboljšati, npr. zamjenjivanjem dodjeljivanja od A i od C. Time dodjeljujemo A na posao 3 i C na posao 1. Ova zamjena nije korisna, ali neke zamjene jesu tj. zamijenimo dodjeljivanja od A i od B.

Primijetimo da je prethodna heuristička metoda bez matematičke formulacije problema.

Heuristički algoritmi za cjelobrojno programiranje vrlo su rašireni u literaturi i često primjenjivani (vidi primjerice [1], [6]). Za formuliranje heurističkih algoritama potrebno je i dobro poznavanje ostalih metoda.

3. Zaključak

Radom je dan kratak pregled poznatih rezultata. Posebna pozornost posvećena je efikasnoj i korisnoj Heurističkoj metodi. Naveden je jedan primjer brzog i efikasnog rješenja uz korištenje Heurističke metode. Dana su izvjesna poboljšanja koja možemo efikasno primijeniti u ekonomiji.

LITERATURA

1. D. Barković; *Operacijska istraživanja*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Ekonomski fakultet, Osijek, 1997.
2. C.S.Tang; *A max - min Allocation problem: Its Solutions and Applications*, *Operations Research*, 36 (1998.), 359-367 str.
3. I.B.Mazzola, A.W.Neebe; *Resource – Constrained Assignment Scheduling*, *Operations Research*, 34 (1986.), 560-572 str.
4. A.Pinnai, W.E.Wilhelm; "A Branch and Cut Approach for Workland smooting on Assembly Lines", *Journal on Computing*, 9 (1997.), 53-65 str.
5. C.Barnhart, P.loannon; *NFS Workshop Maps out Plan for Transportation*, *OR/MS Today*, 26 (1999.), 32-36 str.
6. G.Sierksma; *Linear and Integer Programming*, Marcel Dekker, inc., New York, 1996.
7. T.Koch; *The organ Transplantation Dilema*, *OR/MS Today*, 26 (1999.), 22.-28. str.

Dominika Crnjac Milić, Ph.D.

*J.J. Strossmayer University, Faculty of Electrical Engineering
in Osijek*

Ljiljanka Kvesić, M.Sc.

*Secondary vocational school Široki Brijeg, Bosnia and Herze-
govina*

HEURISTIC METHODS OF INTEGER PROGRAMMING AND ITS APPLICATIONS IN ECONOMICS

SUMMARY

A short overview of the results related to integer programming is described in the introductory part of this paper. Furthermore, there is a list of literature related to this field.

The main part of the paper analyses the Heuristic method which yields a very fast result without the use of significant mathematical tools.

KEYWORDS

programming, decision-making, integer programming, optimum, algorithm