Život između dva kvadrata

Dijana Kreso

Ovdje se ne radi o nekakvom triku, teoremu ili pravilu... Naprosto je riječ o načinu zaključivanja. Čista logika! Krenimo s jednim trivijalnim primjerom koji će nas uvesti u priču.

▶ **Primjer 1.** Može li za prirodan broj n broj $n^2 - 2n + 2$ biti kvadrat prirodnog broja?
Rješenje. Djeluje jako jednostavno. Tako i jest! Ono što moramo primijetiti, jest da vrijedi:

$$n^2 - 2n + 2 = (n^2 - 2n + 1) + 1 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2.$$

ali je i $n^2 - 2n + 2 < n^2$ za $n > 1$.

Dakle, za $n > 1$, $n^2 - 2n + 2$ nikako ne može biti kvadrat prirodnog broja jer se nalazi između kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

Preostaje provjeriti slučaj $n = 1$. $n = 1$ je rješenje jer u tom slučaju imamo kvadrat jedinice 1^2. ✓

Dakle, ovaj primjer daje naslutiti da ćemo se u članku baviti nekakvim **ograničavanjem skupa rješenja** tako što ćemo paziti između kojih se kvadrata nalazi kvadrat koji promatramo. Naravno, tako nešto možemo promatrati samo kada smo u skupu $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{Z}$.

Evo nešto slično, samo mrvicu☺ teže...

▶ **Primjer 2.** Za koje $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost $m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$.
Rješenje. Raspišimo izraze s obije strana dane jednakosti:

$$\begin{aligned} m^2 + (m+1)^2 &= 2m^2 + 2m + 1 \\ n^4 + (n+1)^4 &= n^4 + (n^2 + 2n + 1)^2 \\ &= n^4 + n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &= 2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem (i poništavanjem 1 s obije strana jednakosti) dobivamo:

$$2m^2 + 2m = 2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n \qquad / : 2$$

$$\begin{aligned} m^2 + m &= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n \\ &= (n^2 + n)^2 + 2(n^2 + n) \end{aligned}$$

dakle dana jednakost ekvivalentna je

$$m^2 + m + 1 = (n^2 + n + 1)^2$$

Prema tome, $m^2 + m + 1$ je kvadrat prirodnog broja. No,

$$m^2 < m^2 + m + 1 < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Kako $m^2 + m + 1$ leži između kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, on nikako ne može biti kvadrat prirodnog broja. ✓

Nisu svi zadatci u kojima je ključno primijeniti ovu *foru* trivijalni☹. Evo ih nekoliko gdje treba dobro razmisliti...

▶ **Primjer 3.** (Dodatno natjecanje 2003.) Nađite sve uređene parove prirodnih brojeva (m,n) za koje su brojevi m^2-4n i n^2-4m potpuni kvadrati.
Rješenje. Neka su $x,y\in\mathbb{N}_0$ takvi da je

$$\begin{aligned} m^2-4n &= x^2\\ n^2-4m &= y^2. \end{aligned}$$

Najprije primijetimo da iz $m^2-4n\geq 0$ i $n^2-4m\geq 0$ slijedi

$$n\leq\frac{m^2}{4}\quad \text{i}\quad n^2\geq 4m \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{m^2}{4}\right)^2\geq n^2\geq 4m \quad\Rightarrow\quad m^4\geq 64m \quad\Rightarrow\quad m^3\geq 64=4^3.$$

Dobili smo da je $m\geq 4$, a na isti način slijedi $n\geq 4$.

U slučaju $m=n$ dobivamo

$$m^2-4m=x^2 \quad\Rightarrow\quad (m-2)^2-x^2=4,$$

odnosno $(m-2-x)(m-2+x)=4$. Lako se pokaže da jedno je rješenje $m=4$. (Pokažite to sami.) Odnosno $m=n=4$ je jedno rješenje. Uočite da za $m=4$ slijedi da je $n=4$ i obratno. Ostaju nam zanimljivi samo slučaji kada je $m\geq 5$, $n\geq 5$ i $n\neq m$.

Neka je $m>n\geq 5$ (druga mogućnost ide analogno). Tada je

$$x^2=m^2-4n>m^2-4m=(m-3)^2+(2m-9),$$

što je za $m\geq 5$ veće od $(m-3)^2$. Dakle,

$$(m-3)^2<x^2<m^2.$$

Ovo je bio ključni korak. Preostaje još samo provjeriti dva slučaja: $x=m-2$ i $x=m-1$.

1. slučaj: $x=m-2$ odnosno $x^2=(m-2)^2$. Redom slijedi: $m^2-4n=(m-2)^2$, $n=m-1$. Dobili smo

$$n^2-4m=(m-1)^2-4m=m^2-6m+1.$$

Kako je $m^2-6m+1=y^2$ nadopunjavanjem do kvadrata

$$\begin{aligned} m^2-6m+9-8 &= y^2\\ (m-3)^2-y^2 &= 8. \end{aligned}$$

tj. $(m-3-y)(m-3+y)=8$. Provjerom nekoliko slučaja lako se dobije da je jedino rješenje $m=6$, odakle je $n=5$. Pa je $(n,m)=(5,6)$ također rješenje.

2. slučaj: $x^2=(m-1)^2$. Slijedi: $m^2-4n=(m-1)^2$, $4n=2m-1$, što je nemoguće.

Za $n>m\geq 5$ rješenje je $(n,m)=(6,5)$.

Konačno, rješenja su $(n,m)\in\{(4,4),(6,5),(5,6)\}$. ✓

▶ **Primjer 4.** (Mediteransko natjecanje 2002.) Odredite sve $x,y\in\mathbb{N}$ takve da $y\,|\,x^2+1$ i $x^2\,|\,y^3+1$. ($a\,|\,b$ označava da je b djeljivo s a.)
Rješenje. Zapišimo to ovako: postoje $a,b\in\mathbb{N}$ takvi da je

$$\begin{aligned} x^2+1 &= ay\\ y^3+1 &= bx^2, \end{aligned}$$

odakle je $y^3+1=b(ay-1)$, tj.

$$y^3-aby+b+1=0. \tag{1}$$

Slijedi $y \,|\, b+1$, tj. postoji $c \in \mathbb{N}$ takvo da je $b+1 = cy$. Uvrštavanjem $b = cy-1$ u (1) dobivamo

$$\begin{aligned} y^3 - a(cy-1)y + cy &= 0 \quad / : y \neq 0 \\ y^2 - acy + (a+c) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe (2) je

$$D = a^2c^2 - 4(a+c).$$

Kako je $y \in \mathbb{N}$, očito je diskriminanta ove jednadžbe potpuni kvadrat. No vrijedi $D < (ac)^2$ ali i $D > (ac-2)^2$, za svaki $a, c \geq 3$. Naime,

$$\begin{aligned} & (ac)^2 - 4(a+c) > (ac-2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -4(a+c) > -4ac + 4 \\ \Leftrightarrow\ & a + c < ac - 1 \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)(c-1) > 2, \end{aligned}$$

što za $a, c \geq 3$ zaista vrijedi te je:

$$(ac-2)^2 < D < (ac)^2 \quad \Rightarrow \quad D = (ac-1)^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a^2c^2 - 4(a+c) &= (ac-1)^2 \\ -4(a+c) &= -2ac + 1 \\ 4(a+c) &= 2ac - 1. \end{aligned}$$

S lijeve strane je paran, a s desne neparan broj! Prema tome, u ovom slučaju **nemamo rješenja**.☺

Rješenja, ako postoje, naći ćemo u slučaju kad je barem jedan od brojeva a ili c (strogo) manji od 3.

Eto, poprilično težak zadatak elegantno smo sveli na 4 jednostavna slučaja: 1. $a = 1$; 2. $a = 2$; 3. $a = 3$; 4. $a = 4$.

1. slučaj. Za $a = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} D &= a^2c^2 - 4(a+c), \\ &= c^2 - 4(1+c). \end{aligned}$$

Broj D mora biti potpuni kvadrat, znači postoji $d \in \mathbb{N}_0$ takav da je $D = d^2$. Dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 - 4c - 4 &= d^2, \\ (c-2)^2 - 8 &= d^2, \\ (c-2)^2 - d^2 &= 8, \\ (c-2-d)(c-2+d) &= 8. \end{aligned}$$

Brojevi u zagradama iste su parnosti, a zbog $c \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathbb{N}_0$ mora biti $c - 2 + d \geq -1$, a kako je $c - 2 + d$ paran broj različit od nule, vrijedi

$$c - 2 + d > 0$$

pa je jedina mogućnost

$$\begin{aligned} c - 2 - d &= 2, \\ c - 2 + d &= 4. \end{aligned}$$

Dobivamo $c = 5$. Vratimo se u jednakost (2):

$$\begin{aligned} y^2 - 5y + 6 &= 0, \\ (y-2)(y-3) &= 0. \end{aligned}$$

Za $y = 2$, $c = 5$, $a = 1$, tj.

$$x^2 + 1 = ay = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Jedno rješenje je $(2, 1)$.

Za $y = 3$

$$x^2 + 1 = ay = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$$

što nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Ostali slučaji provode se analogno.

Konačna rješenja su $(x, y) \in \{(1, 1),\ (2, 1),\ (3, 2),\ (3, 5)\}$. ✓

Službeno je rješenje drugačije. Pronađite i to rješenje i usporedite koje vam se čini bržim i elegantnijim.

Za vježbu pogledajte 2. zadatak s Olimpijade 2003. godine. Zadatak je znatno teži, no uz određene razlike i on se može riješiti slično kao i ovi zadatci.

Zadatak 1. *Odredite sve parove (a, b) prirodnih brojeva takve da je*

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

prirodan broj.

Uputa. Uz oznaku

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$$

možemo pisati

$$a^2 - 2ab^2k + (b^3k - k) = 0.$$

Pokušajte gornju jednakost promatrati kao kvadratnu jednadžbu po a. Zatim probajte ograničiti diskriminantu... *NIJE LAKO!*