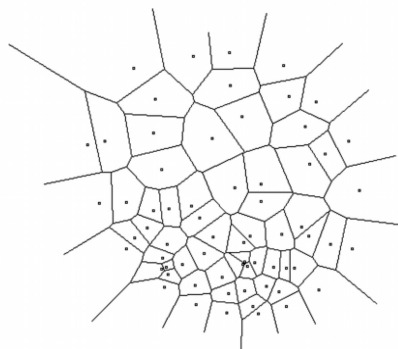


Voronojevi dijagrami

Andro Rezić

Voronojev dijagram, također zvan Voronojeva dekompozicija (rastav), nazvan je po ruskom matematičaru **Voronuju**¹

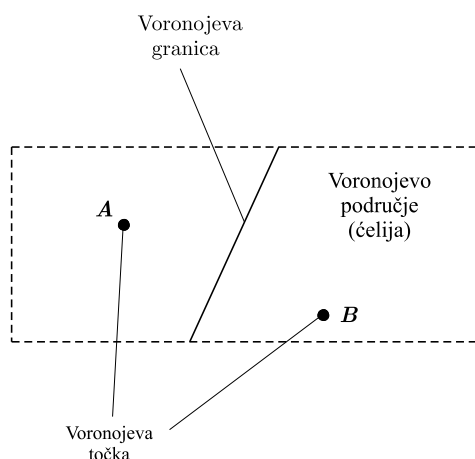


Slika 1. Rastav ravnine na područja

Definicija 1. Za bilo koji određeni konačni skup točaka S (skup Voronojevih točaka) u standardnoj (euklidskoj) ravnini, i za skoro svaku točku X , postoji jedna točka iz S kojoj je X bliži nego bilo kojoj drugoj točki iz S .

Riječ 'skoro' koristi se zbog činjenice da točka X može biti jednako udaljena od dvije ili više točaka iz S .

Ako se S sastoji samo od dvije točke A i B , onda je skup svih točaka jednako udaljenih od A i B pravac. Taj je pravac granica između skupa svih točaka bližih A nego B , i skup svih točaka bližih B nego A . To je simetrala dužine \overline{AB} , a naziva se **Voronojeva granica**. Općenito, skup svih točaka bližih nekoj točki c iz S , nego bilo kojoj drugoj točki iz S , jest unutrašnjost (u nekim slučajevima *neograničenog*) konveksnog mnogokuta zvanog **Voronojeva ćelija** za c . Skup takvih popločenih mnogokuta u ravnini, koji odgovaraju skupu S , zovu se **Voronojevi dijagrami**.



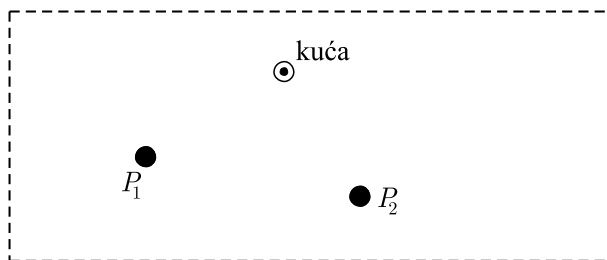
Slika 2.

Možemo reći da je to podjela ravnine u područja tako da svako područje sadrži samo jednu točku i da sve točke iz tog područja budu bliže toj nego bilo kojoj drugoj točki.

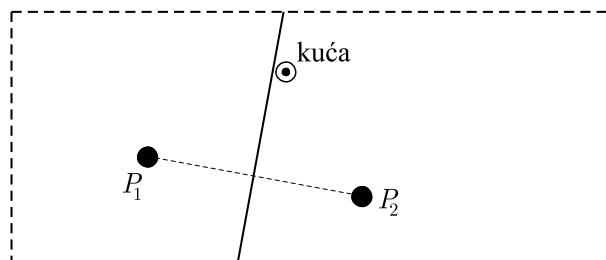
¹Georgij Feodosevič Voronoj (1868. - 1908.)

Primjene Voronojevih dijagrama su svestrane, npr. u astronomiji, ekologiji, šumarstvu, kartografiji, zoologiji, marketingu, metalurgiji, meteorologiji, robotici, statistici, fiziologiji itd.

► **Primjer 1.** Zadane su lokacije dvaju poštanskih ureda i kuće kojoj treba dostaviti pismo. Koji će ured dostaviti pismo? (To znači, treba naći ured koji je bliži kući.)



Slika 3.



Slika 4.

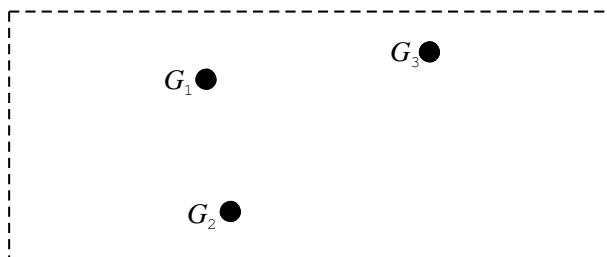
Napravimo Voronojev rastav, tako da su nam centri utjecaja (Voronoejeve točke) poštanski uredi s oznakama P_1 i P_2 . Voronojeva granica tih dviju točaka je simetrala dužine $\overline{P_1P_2}$. Zatim pogledamo unutar kojeg se Voronojevog područja nalazi kuća.

Iz toga vidimo da je najbliži kući onaj poštanski ured koji je Voronojeva točka Voronojevog područja unutar kojeg se nalazi kuća. U ovom slučaju to je poštanski ured s oznakom P_2 .

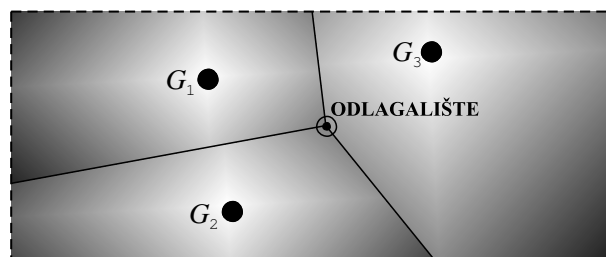
Zadatak 1. Probajte riješiti ovaj isti problem, ali s tri ili više poštanskih ureda.

► **Primjer 2.** Zadane su lokacije triju gradova. Treba naći lokaciju za izgradnju odlagališta smeća, tako da je jednako udaljena od sva tri grada.

Odredimo Voronojeva područja sa središtima u lokacijama gradova s nekim oznakama G_1, G_2, G_3 .



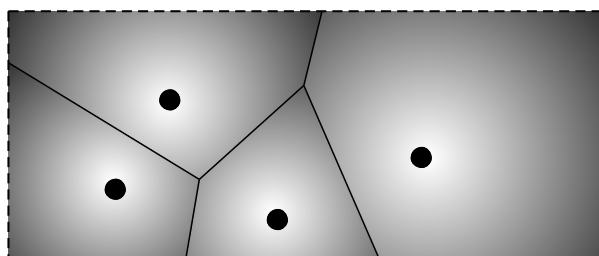
Slika 5.



Slika 6.

Iz toga vidimo da je tražena lokacija sjecište Voronojevih granica jer je jednako udaljena od sva tri grada.

S ovakvim tipom problema već smo se upoznali kod svojstva središta upisane kružnice. Kad se broj točaka (i područja) poveća, situacija se, dakako komplicira. Ovakvi dijagrami se rade kad dijelimo grad na područja po najbližim bolnicama, policijskim postajama. . .



Slika 7.

Određivanje položaja objekata i raspodjelu po područjima olakšava nam *The Geometer's Sketchpad* ili neki drugi alat *dinamične geometrije*. Kartu jednostavno stavimo u pozadinu, točke na određene položaje i naš je zadatak gotov. (Naravno, ravnalo i šestar još uvijek mogu poslužiti. . . ☺)

Zadatak 2. Pronađite neku kartu i odredite najpovoljniji položaj škole, bolnice, vatrogasne postaje, trgovine. . . Odredite područnu policijsku postaju kojoj pripadate!