Školsko natjecanje iz matematike 2005.

Donosimo vam zadatke sa školskog natjecanja V. gimnazije održanog 20. veljače 2005.

Prvi razred

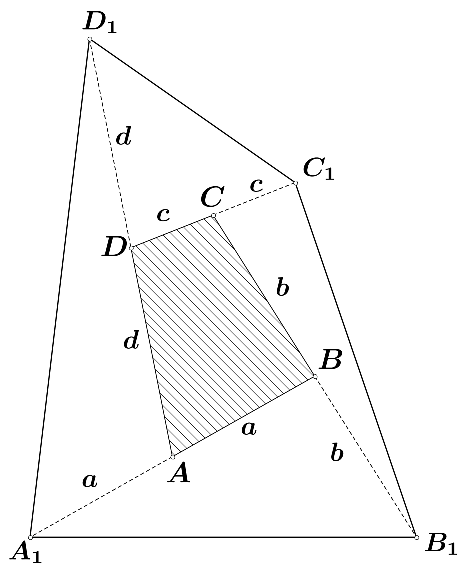
1. Odredi nepoznate brojeve A, B, C u izrazu
$$\frac{1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

2. Neka je $x=0.123456789101112\ldots 997998999$, pri čemu su znamenke dobivene zapisivanjem prirodnih redom od 1 do 999.
   (a) Koja je 2005-ta znamenka desno od decimalne točke?
   (b) Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva koje smo zapisali do 2005-tog mjesta (ne računajući 2005-to mjesto)?

3. Odredi realan broj m takav da za rješenje x jednadžbe $\dfrac{x-m}{m}-\dfrac{x+m}{m}=\dfrac{x+1}{m}$ vrijedi $x\le 1$.

4. Dokaži da ne postoje međusobno različiti prirodni brojevi x i y koji zadovoljavaju jednadžbu $\sqrt{2005}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

5. Ako svaku stranicu četverokuta $ABCD$ produžimo za istu duljinu kao na slici, dobit ćemo četverokut $A_1B_1C_1D_1$ čija je površina pet puta veća od površine četverokuta $ABCD$. Dokaži!



Drugi razred

1. Odredi skup svih točaka z u Gaussovoj ravnini ako je $z=\dfrac{3t+1}{t-i}$, $\quad t\in\mathbb{R}$.

2. Ako su a,b i c duljine stranica trokuta, tada rješenja jednadžbe $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ nisu realna. Dokaži!

3. Na dan koncerta cijena ulaznice je barem 5 kuna skuplja nego u pretprodaji. Kolika je cijena ulaznica u pretprodaji ako na dan koncerta za 210 kuna možemo kupiti barem jednu ulaznicu manje nego u pretprodaji?

4. Treba organizirati koncert u dvorani koja ima 2500 mjesta. Nakon koncerta predviđen je domjenak za sve sudionike. Evo kako izgledaju troškovi:

STAVKA	CIJENA
4 glazbenika svaki po 5000 kuna	20000
blagajna	5000
20 pomoćnika svaki po 100 kuna	2000
iznajmljivanje dvorane	25000
posluživanje	30 kuna po posjetitelju

Promotori predviđaju da bi uz cijenu od 150 kuna dvorana bila rasprodana, dok bi za svakih 20 kuna povećanja cijene 200 ljudi manje kupilo ulaznicu. Odredite najprofitabilniju cijenu ulaznice.

5. Nad katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su izvana kvadrati $ACDE$ i $BCFG$. Ako je $\overline{AG} \cap \overline{BE} = H, \overline{AC} \cap \overline{BE} = K$ i $\overline{AG} \cap \overline{BC} = L$, dokažite da je tada $P(\triangle ABH) = P(CKHL)$.

Treći razred

1. Napiši izraz za točnu vrijednost broja $\cos 142°30'$.

2. Na skupu $[0, 2\pi]$ riješi nejednadžbu
$$\frac{\cos 3x}{2\cos 2x - 1} \leq 0.$$

3. Zadan je skup $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 1},\ |x| < 2005\}$. Ako se skup A sastoji od konačno mnogo elemenata, izračunaj njihov broj. Ako skup A sadrži beskonačno mnogo elemenata, dokaži da je tako.

4. Stranice trokuta dugačke su 2 cm, 3 cm, 4 cm. Izračunaj duljinu težišnice na najdulju stranicu te kut između težišnice i pripadne najdulje stranice.

5. Ako su četverostranoj piramidi sve bočne stranice prema bazi priklonjene pod istim kutom, onda joj je baza tangencijalni četverokut. Dokaži ili opovrgni ovu tvrdnju.

Četvrti razred

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n, broj $2^{3^n} + 1$ djeljiv s brojem 3^{n+1}, a nije djeljiv s brojem 3^{n+2}.

2. Odredite koeficijente uz x i x^2 u izrazu $(2+3x)^{12} \cdot (1-2x)^{10} \cdot (3-x)^6$.

3. Zadan je niz kompleksnih brojeva (a_n) formulom $a_n = (1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)$. Postoji li prirodan broj m takav da je $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 2005$?

4. U kocku brida duljine a upisana je kugla. U tu kuglu upisana je kocka itd. Odredite zbroj oplošja svih tako dobivenih kugli i zbroj volumena svih tako dobivenih kocaka.

5. Zmaj ima n glava i dvostruko više očiju. Na svakoj glavi barem je jedno oko. Ako zmaj ima m jednookih glava, postoji li neka glava sa $m+3$ očiju?

RJEŠENJA I UPUTE NA STRANICI 45.