Posebna nagrada prvašiću

Neke priloge posjetitelja foruma ovjekovječit ćemo tako da ih objavimo u tiskanom formatu kako bi bili dostupni i nakon što se teme zatvore. Tako nam je korisnik **Rudi** poslao sljedeći *post*. (Uz neke sitne izmjene donosimo ga u cijelosti.) Za uvod radi se o trećem zadatku s ovogodišnje olimpijade:

3. Neka su $x,\ y,\ z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz \geq 1$. Dokaži

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0.$$

Isječak sa foruma:

Autor	Poruka
Rudi Moderator	Postano: 20 Srp 2005 21:37:59 Žiri ponekad dodijeli posebnu nagradu za odlično (genijalno) rješenje određenog zadatka. Do ove godine to se zadnji put dogodilo 1995., a ove je godine tu nagradu dobio ***Boreico Iurie*** (Moldavija 1) i to za treći zadatak i ovo **super-kratko** rješenje. $$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geq 0.$$ Dakle, prvi član veći je od drugog. Analogno se dobiva i za preostale izraze iz teksta zadatka. Sada je $$\begin{aligned} R &= \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \\ &\geq \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)} \\ &= \frac{x^2-1/x+y^2-1/y+z^2-1/z}{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$ Sada se iz $xyz \geq 1$, dobiva $-1/x \geq -yz$. Zato je $$\begin{aligned} R &\geq \frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2(x^2+y^2+z^2)}\geq 0. \end{aligned}$$ Jednakost očito vrijedi ako je $x=y=z=1$. Kad se svi razlomci napišu kako treba, vidi se da je rješenje kratko i jednostavno. Inače, *klinjo* koji se ovog sjetio **prvi** je **razred** srednje škole, imao je **sve** bodove i ovo mu je **treće zlato**. Pozdrav.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Sve čestitke ***Boreico***! Jedini komentar koji imamo: *ovo je još jedan dokaz iz Knjige.*[1]

[1]Matematičar **Paul Erdös** govorio je o *Knjizi* u kojoj Bog čuva savršene dokaze: *Ne morate vjerovati u Boga, ali kao matematičar morate vjerovati u Knjigu.*