Kako funkcioniraju funkcije

Azra Tafro

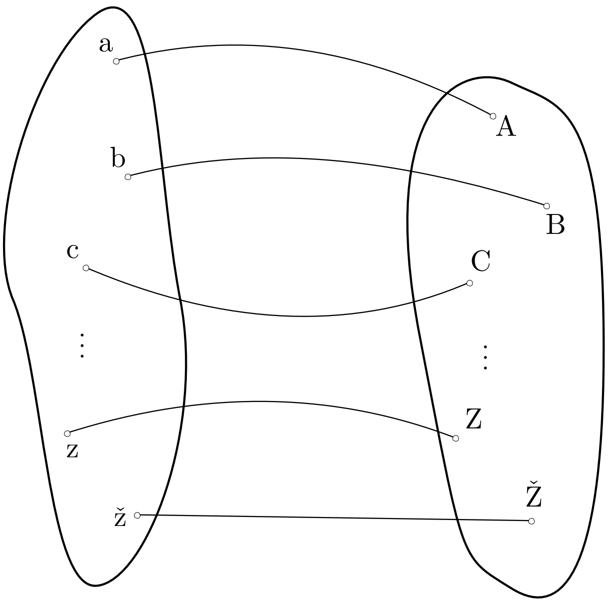
Ovaj članak pokušat će mlađem čitateljstvu pojasniti pojam *funkcije*. Čini da čak ni najbolji učenici koji dođu iz osnovne škole nisu u potpunosti razumijeli pojam funkcije, što se pokazalo na Općinskom natjecanju za 1. razrede 2004. godine kada je velika većina natjecatelja poistovjetila funkciju sa pravcem.

Mala i velika slova

Pravac je samo graf jedne od funkcija. Funkcija ima različitih, a mnoge među njima čak i ne možemo grafički prikazati u koordinatnom sustavu. Počnimo s jednim jednostavnim primjerom. U sljedećoj tablici imamo mala tiskana i njima odgovarajuća velika tiskana slova

MALA SLOVA	a	b	c	...	z	ž
VELIKA SLOVA	A	B	C	...	Z	Ž

Uočimo kako imamo uspostavljenu *prirodnu vezu* između malih i velikih slova.



Slika 1. *Veza između malih i velikih slova.*

Na slici 1. prikazani su redom skupovi malih i velikih slova, te veza između njih.

Sada recimo da želimo ***čarobni postupak*** koji će *mala* slova pretvarati u *VELIKA*. Prvo nam treba neko **pravilo** po kojem ćemo to napraviti. Nazovimo to pravilo f. Ono će svakom malom slovu abecede koje mi odaberemo pridružiti veliko slovo. Mi odaberemo slovo 'a', a pravilo f pridružit će slovo 'A', malom 'b' pridružit će 'B',... To još pišemo $\mathrm{a} \stackrel{f}{\mapsto} \mathrm{A}$, $\mathrm{b} \stackrel{f}{\mapsto} \mathrm{B}\dots$ ili $f(\mathrm{a}) = \mathrm{A}$, $f(\mathrm{b}) = \mathrm{B}\dots$

Tako smo dobili **funkciju** koja preslikava elemente iz skupa MALA SLOVA u skup VELIKA SLOVA. Ovo još pišemo

$$f : \text{MALA SLOVA} \to \text{VELIKA SLOVA}.$$

Skup MALA SLOVA (skup iz kojeg f uzima elemente) zovemo **domenom**, a skup VELIKA SLOVA (skup u koji f vraća elemente) **kodomenom**. Tri stvari koje određuju funkciju su domena, kodomena i pravilo.

Mnogi će se s pravom zapitati, pa dobro ***gdje se pojavljuje ta funkcija?*** Vjerovali ili ne većina nas ovu funkciju (čije smo pravilo nazvali f) imaju na svom računalu! Mnogi *editori* teksta nam omogućuju promjenu slova dijelova teksta iz malih u velika... Recimo da smo odabrali sljedeći dio teksta

$$\boxed{\text{azra piše članak za playmath}}$$

i damo računalu naredbu da mala slova pretvori u velika (upper case). Računalo će slovo po slovo pomoću funkcije f mijenjati veličinu slova, na sljedeći način

$$\boxed{\text{azra piše članak za playmath}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{c} f(\text{a})f(\text{z})f(\text{r})f(\text{a})\ f(\text{p})f(\text{i})f(\text{š})f(\text{e}) \\ f(\text{č})f(\text{l})f(\text{a})f(\text{n})f(\text{a})f(\text{k})\ f(\text{z})f(\text{a}) \\ f(\text{p})f(\text{l})f(\text{a})f(\text{y})f(\text{m})f(\text{a})f(\text{t})f(\text{h}) \end{array}}$$
$$\|$$
$$\boxed{\text{AZRA PIŠE ČLANAK ZA PLAYMATH}}$$

Mnogi će primijetiti kako smo 'azra' u tekstu napisali malim početnim slovom. *Što bi bilo da smo to napisali 'Azra'?* Sa dosad definiranim pravilom f došlo bi do greške (ili u najboljem slučaju računalo ne bi ništa ispisalo). Naime, funkciju f definirali smo tako da mu je domena skup MALA SLOVA, pa $f(\text{A})$ **nije definirano**! Međutim, pravilo f i domenu možemo *proširiti*. Tako nastaje funkcija $\tilde{f}$ koju definiramo na skupu MALA I VELIKA SLOVA, a preslikava u skup VELIKA SLOVA. Pravilo je dano idućom tablicom

SLOVO	a	b	...	ž	A	B	...	Ž
$\tilde{f}$(SLOVO)	A	B	...	Ž	A	B	...	Ž

Sada bi postupak pretvaranja slova u velika završio *očekivano dobro* da je pisalo i 'Azra'.

Osnove

Nakon ovog pomalo slikovitog uvoda ponovimo definiciju funkcije:

***Definicija* 1.** Preslikavanje ili funkcija sa skupa S u skup T je uređena trojka (S, T, f) koja se sastoji od skupa S, koji se zove **područje definicije** ili **domena**, skupa T, koji se zove **područje vrijednosti** ili **kodomena**, te nekog pravila f, pomoću kojeg svakom elementu x iz S pridružujemo neki element y iz T (koji ovisi o x).

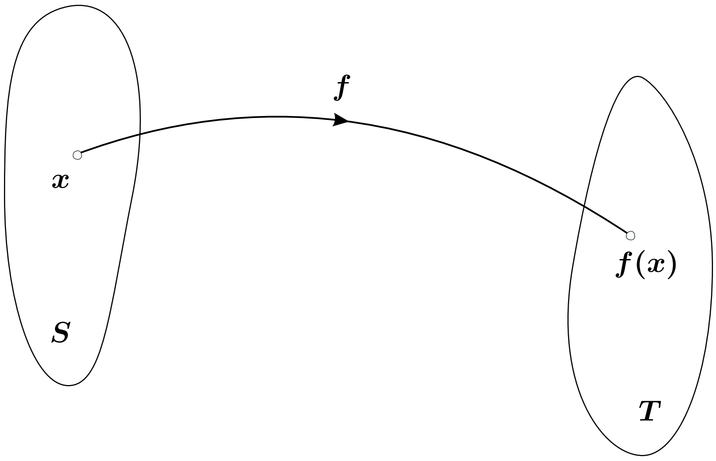
Pridruženi element zove se **vrijednost preslikavanja** za element x i označava se sa $f(x)$ ili fx.

Ovo jednostavno pišemo $x \mapsto f(x)$, čime se označava funkcija koja prevodi element x u $f(x)$.

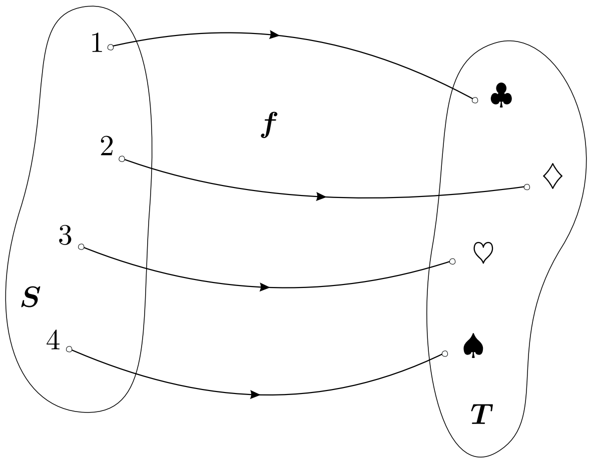
Npr. kvadriranje je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$, a katkad se naprosto zapisuje da je funkcija kvadriranja zadana sa $y = x^2$.

Pravilo pridruživanja možemo zadati *analitički*, odnosno formulom, ali možemo ga odrediti i drugačije. Npr. ako je $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ i $T = \{\clubsuit,\ \diamondsuit,\ \heartsuit,\ \spadesuit\}$, možemo pridruživanje zadati pomoću uređenih parova:

$$\Gamma_f = \{(1,\ \clubsuit), (2,\ \diamondsuit), (3,\ \heartsuit), (4,\ \spadesuit)\}.$$



Slika 2. *Preslikavanje* $f : S \to T$



Slika 3.

Funkcija ne mora biti "strogo matematički" pojam, na mnoge stvari u svakodnevnom životu možemo gledati kao na funkcije.

Primjer 1. Bliži se rok za tiskanje novog broja *PlayMath*-a, i Tvrtko mora uposliti svoje novinare Kristinu, Matiju, Anu, Hanu, Vanju, Rudija, Marinu i Azru da napišu članke. Funkcija koja mu treba je pravilo pridruživanja tema pojedinom autoru. Domena će biti skup novinara, a kodomena skup zanimljivih tema iz matematike. Jedino pravilo, da bi funkcija bila valjana, je da svakom elementu domene bude pridružen točno jedan element kodomene. (To je i logično, novinara treba uposliti jer inače nikakve koristi od njega, a ako mu date više od jednog zadatka, bit će prezaposlen i loše će ih obaviti.)

Ovo se može prikazati tablicom (još jedan način prikazivanja funkcije):

ime / tema	1.	2.	3.	...	$n-1.$	$n.$
Kristina	•					
Matija			•			
Ana					•	
⋮						
Azra		•				

(Crne točke • označavaju koji član uredništva ima koju temu. Ovakve tablice mogu se vrlo često naći na stolu glavnog urednika.☺)

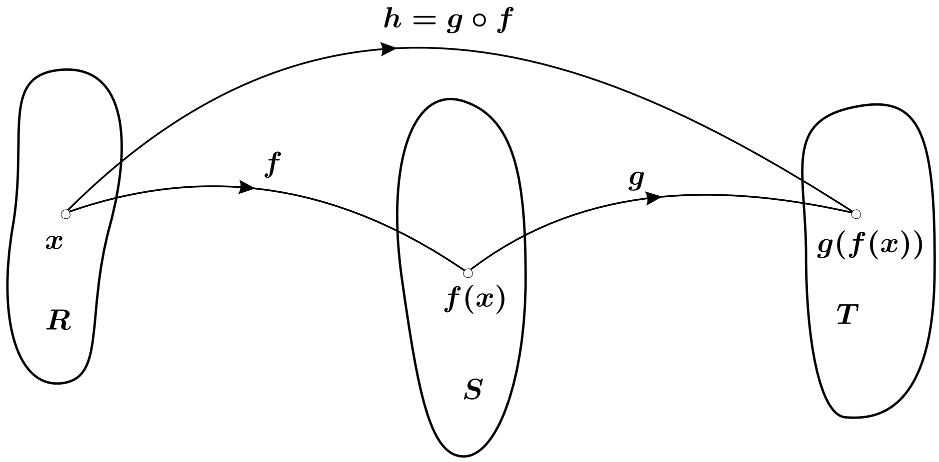
Uočavate da funkcija ima beskonačno mnogo i da se međusobno veoma razlikuju. Neke funkcije imaju neka posebna svojstva. Bolje je usredotočiti se na one koje imaju neka *lijepa* svojstva. No o tome ćemo u nekom drugom broju.

Kompozicija preslikavanja

***Definicija* 2.** Kompozicija preslikavanja $f : R \to S$ i $g : S \to T$ je preslikavanje $h : R \to T$, takvo da je za svako x iz R

$$h(x) = g(f(x)).$$

Oznaka za kompoziciju od f i g je $g \circ f$, tj. $h = g \circ f$.



Slika 4. *Preslikavanje* $f : S \to T$

Npr. ako imamo $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 5$, tada je

$$\begin{aligned} h(x) &= (g \circ f)(x) \\ &= g(f(x)) \\ &= f(x) + 5 \\ &= x^2 + 5. \end{aligned}$$

Uočimo,

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

naime

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 5)^2$$

(prvo se izvršava *unutarnja*, a onda *vanjska* funkcija). Ako bismo uz našu funkciju pridruživanja teme autoru imali i funkciju koja temi pridružuje stranicu na kojoj tema počinje u časopisu, tada bi kompozicija tih dviju funkcija svakom autoru pridruživala stranicu.

Oprez! Da bi kompozicija bila ispravna, kodomena *unutarnje* funkcije (one koja se prva *izvršava*) mora biti podskup domene *vanjske* funkcije. U suprotnom, prva funkcija preslikavla bi početni element u neku točku koja nije u domeni druge, pa druga funkcija *ne bi znala* kamo da ju preslika. Npr. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$. Za $x = -1$ $f(x) = 0$ pa je $g(f(x)) = g(0) = 1/0$, što je **nedefinirano!**

Još jedan primjer je funkcija f : MALA SLOVA $\to$ VELIKA SLOVA, s početka članka; $f(\mathrm{a}) = \mathrm{A}$, no $f(f(\mathrm{a})) = f(\mathrm{A})$, što nije definirano.

Još neke funkcije

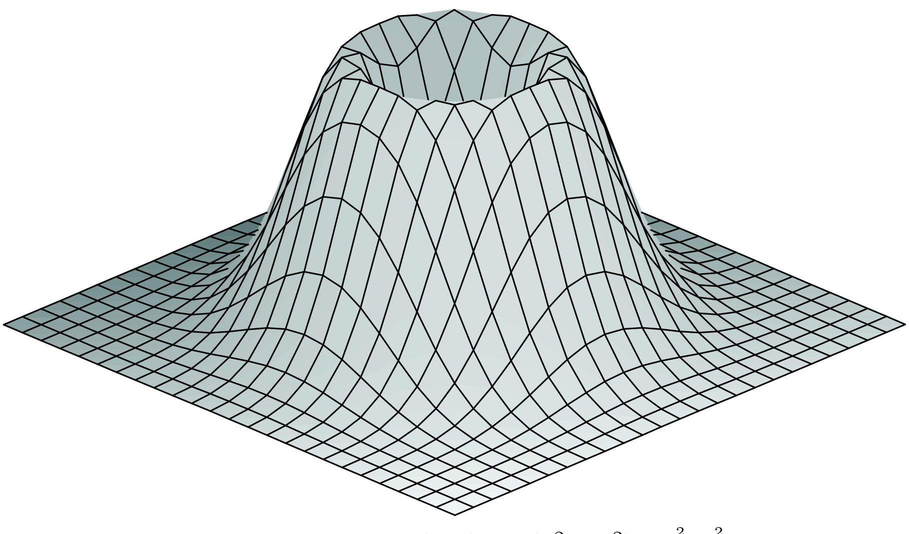
Na stranicama *PlayMath*-a mogli ste se susresti s raznim funkcijama poput $\lfloor x \rfloor$,[1] $\varphi(n)$,[2] e^x, $\cos x$,…sve ove funkcije imaju razna pravila, domene, kodomene. Vrlo korisna funkcija za ispitivanje pripada li element nekog ("velikog") skupa U nekom podskupu S od U je tzv. karakteristična funkcija $\chi_S : U \to \{0,1\}$, gdje je

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in S; \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Umjesto skupa $\{0,1\}$ može se uzeti bilo koji dvočlani skup, npr. $\{\top,\bot\}$ ({ISTINITO, LAŽNO}) itd. Ta je funkcija vrlo korisna za programiranje na računalima.

Nadam se da čitatelji sada imaju širi pogled na funkcije. ☺

MATEMATIČKE 3D SLIKE



Vulkanska funkcija $f(x,y) = 2(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

[1] Vidi *T. Tadić:* Najveće cijelo $\lfloor x \rfloor$ i njegovi prijatelji, *PlayMath* br. 4 (2004.)

[2] Vidi *A. Tafro:* Kongruencije, *PlayMath* br. 3 (2003.) str. 12.