Metodički obzori 10.; vol. 5(2010)2
Stručni članak
UDK: 514.763.7:373.3
Primljeno: 21. 2. 2009.

CJELOBROJNI KVADRATI U KVADRATNOJ MREŽI

Dr. sc. Vladimir Kadum, prof. v.š.
Odjel za odgojne i obrazovne znanosti
Sveučilište Jurja Dobrile u Puli (Hrvatska)
e-mail: vladimir.kadum@pu.t-com.hr

S a ž e t a k

U osnovnoj školi kvadratna mreža uglavnom se koristi pri rješavanju geometrijskih zadatka. U članku autor ukazuje i na druge mogućnosti njenog korištenja u nastavi matematike.

Sadržaji izloženi u ovome radu, kao cjelina, namijenjeni su prvenstveno radu s onim učenicima osnovne škole koji u matematici *žele i mogu više*, tj. radu s mladim matematičarima (osnovne škole).

Ključne riječi: *cjelobrojni kvadrati, geometrijski zadaci, kvadratna mreža, mladi matematičari, nastava matematike, osnovna škola, učenici koji mogu i žele više*

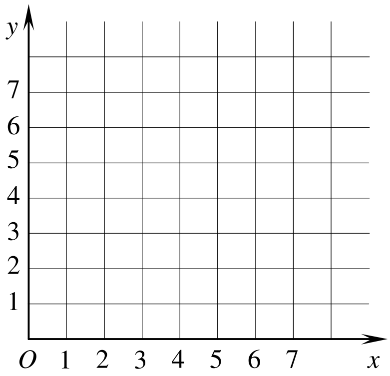
U prvom kvadrantu Kartezijevog[1] koordinatnog sustava povucimo iz točaka 1, 2, 3, 4… na apscisnoj osi *Ox* polupravce usporedne (paralelne) s ordinatnom osi *Oy* i iz točaka 1, 2, 3, 4… na osi *Oy* polupravce usporedne s osi *Ox*. Ti polupravci čine mrežu jediničnih kvadrata (slika 1) sa čvorovima u cjelobrojnim točkama, tj. točkama čije su koordinate cijeli – a u ovom slučaju i nenegativni – brojevi. Navedeni polupravci su *crte mreže*.

---

[1] **Rene Descartes** (La Haye Touraine, 31. 3. 1596. – Stockholm, 11. 2. 1650.) veliki francuski matematičar; u filozofiji poznat kao osnivač racionalizma.

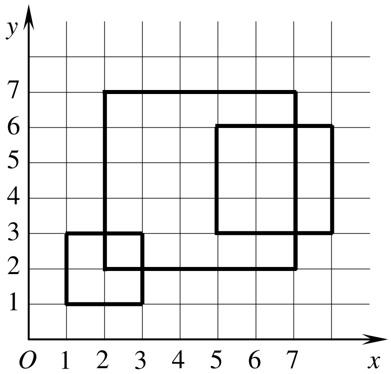
U knjizi *Geometrija* (tiskana 8. 6. 1637. godine) – dijelu obimnijeg djela skraćenog nazivom *Rasprava o metodi* – uveo je pojam promjenljive veličine (varijable) i koordinatnog sustava koji su po njegovom latiniziranom imenu **Cartesius** i danas tako naziva. Time je rođena analitička geometrija do kojih je rezultata došao još 1619. Razvio je algebarsku metodu u geometriji. Smatrao je da se svaki matematički problem može svesti na algebarski jezik, a potom riješiti sredstvima analitičke geometrije. Imao je predodžbu o realnom broju blisku današnjoj. Proučavao je algebarske jednadžbe i među prvima uočio je da vrijedi osnovni teorem algebre. U djelima se služio terminologijom i oznakama koje se ne razlikuju mnogo od sadašnjih: oznake *x, y, z…* za varijable, *a, b, c…* za koeficijente (konstante), oznake x^2, x^3… za potecije itd. Pronašao je i formulu koja nosi ime *Eulerova formula*.

U kvadratnoj mreži promatrat ćemo kvadrate s vrhovima u čvorovima, tj. u cjelobrojnim točkama – zato ih i zovemo *cjelobrojni kvadrati* – ali sa stranicama koje ne moraju pripadati crtama mreže.



Slika 1.

Očito je da postoji neograničeno mnogo cjelobrojnih kvadrata čiji se jedan vrh nalazi u nekom od čvoru mreže, a stranice pripadaju crtama mreže (slika 2). Duljine stranica svih takvih kvadrata su *pozitivni cijeli brojevi*.



Slika 2.

Nadalje, postoji neograničeno mnogo cjelobrojnih kvadrata s vrhom u zadanom čvoru i dijagonalom na tzv. *dijagonalnoj crti* mreže[2]. I u ovom slučaju su duljine stranica tih kvadrata pozitivni cijeli brojevi.

Međutim, ako su dva vrha kvadrata u čvorovima koji ne leže na istoj crti mreže, ne možemo biti *unaprijed sigurni* da se *za bilo koja* dva tako zadana čvora može

[2] *Dijagonalnom crtom* mreže zvat ćemo pravac koji prolazi kroz dva suprotna vrha nekog jediničnog kvadrata.

konstruirati odgovarajući cjelobrojni kvadrat. Naime, postojanje takvog kvadrata mora se *dokazati*. Treba, prema tome, riješiti sljedeći zadatak:

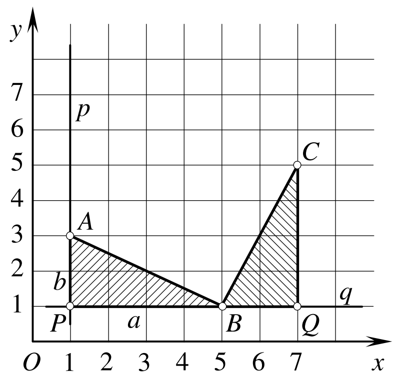
Ako su dva susjedna vrha A i B kvadrata u po volji odabranim dvjema točkama (čvorovima), dokazati da je kvadrat ABCD cjelobrojan.

Ili, u nešto jednostavnijoj formulaciji:

Ako su dva susjedna vrha A i B kvadrata u dvjema cjelobrojnim točkama koje ne pripadaju istoj crti mreže, dokazati da su i preostala dva vrha C i D u cjelobrojnim točkama.

D o k a z. Sa p označimo vertikalnu crtu mreže na kojoj leži vrh A i sa q horizontalnu crtu na kojoj leži vrh B (slika 3). Presjek ovih dviju crti označimo s P, tj.

$$p \cap q = \{P\}.$$



Slika 3.

Presjek P ovih crti je cjelobrojna točka, a dužine AP i BP katete su pravokutnog trokuta i imaju stoga cjelobrojnu duljinu a odnosno b. Dužina AB je jedna stranica traženoga cjelobrojnog kvadrata $ABCD$ za čiji vrh mora vrijediti

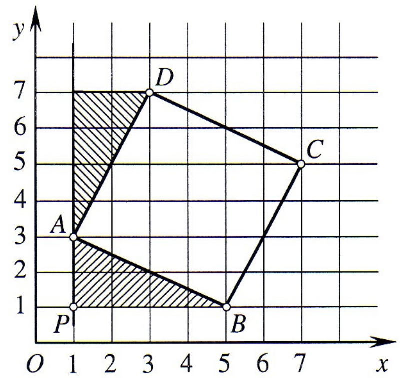
$$|BC| = |AB| \quad \text{i} \quad BC \perp AB.$$

Neka je dužina CQ okomita na pravac q, tj. $CQ \perp q$ ($Q \in q$). Zato je trokut BQC pravokutan i $\angle CBQ = \angle BAP$ (okomiti kraci). Kakao je još i $|BC| = |AB|$ slijedi da je

$$\Delta BQC \cong \Delta APB.$$

Iz ove sukladnosti slijedi $|BQ| = |AP|$ i $|CQ| = |BP|$. Znači da i katete BQ i CQ imaju cjelobrojnu duljinu, tj. da se vrh C nalazi u nekoj cjelobrojnoj točki mreže.

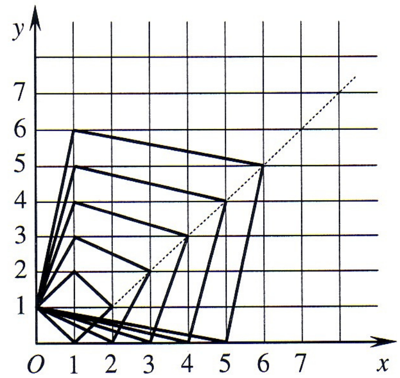
Na analogan se način utvrđuje da je i četvrti vrh, točka D, kvadrata $ABCD$ cjelobrojna točka mreže (slika 4.) Time je dokazano da se u kvadratnoj mreži, nad proizvoljno odabranoj dužini AB, čiji su krajevi cjelobrojne točke, može konstruirati (nacrtati) cjelobrojni kvadrat *ABCD*, tj. kvadrat kojemu su i preostala dva vrha također cjelobrojne točke.



Slika 4.

N a p o m e n a.

Ako je *p* horizontalna crta mreže kroz vrh *A* i *q* vertikalna crta kroz vrh *B*, dobiva se cjelobrojni kvadrat *ABC'D'* koji je simetričan kvadratu[3] *ABCD* u odnosu na dužinu *AB*.



Slika 5.

Na slici 5 predstavljene su stranice kvadrata čiji susjedni vrhovi ne pripadaju istoj crti mreže. Pritom je vrh *A* u točki 1 i na osi *Oy*, a vrh *B* je, respektivno, u jednoj od točaka 1, 2, 3… na osi *Ox*. Duljine prvih nekoliko ovih dužina *AB* su iracionalni brojevi

[3] U geometriji, sukladni trokuti su ekvivalentni. Međutim, u koordinatnoj ravnini oni to nisu ukoliko im se sva četiri vrha ne podudaraju (pokrivaju), a vrhovi *C* i *C'* kao i vrhovi *D* i *D'* razlikuju se svojim koordinatama.

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,,\quad \sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,,\quad \sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

i dalje

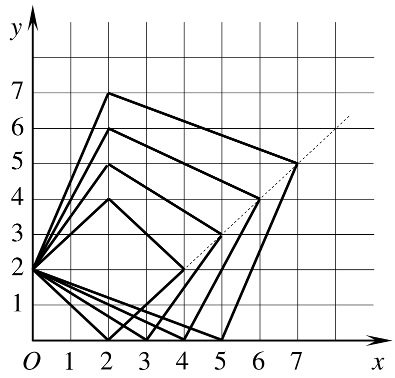
$$\sqrt{17}\,,\quad \sqrt{26}\,,\quad \sqrt{37}\,,\quad \sqrt{50}\,,\ \ldots$$

Ako je vrh *A* u točki 2 na osi *Oy* a vrh *B* je, respektivno, u točkama 2, 3, 4… na osi *Ox* (slika 6), duljine prvih nekoliko tih dužina *AB* bit će opet iracionalni brojevi. Imamo, naime

$$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}\,,\quad \sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\,,\quad \sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

i dalje

$$\sqrt{26}\,,\quad \sqrt{29}\,,\quad \sqrt{40}\,,\quad \sqrt{53}\,,\quad \sqrt{68}\,,\ \ldots$$



Slika 6.

Međutim, ako je, na primjer, vrh *A* u točki 3 na osi *Oy* a vrh *B* u točki 4 na osi *Ox*, tada je duljina dužine *AB* racionalan broj i to cijeli broj 5. Naime, primjenom Pitagorina poučka imamo

$$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\,.$$

Zato se nameće sljedeće pitanje:

Kada je duljina dužine, čije su rubne točke (krajevi) cjelobrojne točke kvadratne mreže, racionalan a kada iracionalan broj?

Odgovor na ovo pitanje dajemo na sljedeći način:

U kvadratnoj mreži uočimo dvije cjelobrojne točke, jednu $A \neq 0$ na osi *Oy* i drugu $B \neq 0$ na osi *Ox* (slika 7). Nadalje, označimo s *a, b, c* redom duljine dužina *OB, OA* i *AB*. Za pravokutan trokut *OBA*, primjenom Pitagorina poučka, imamo

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a,b \in \mathbf{N},$$

odnosno

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

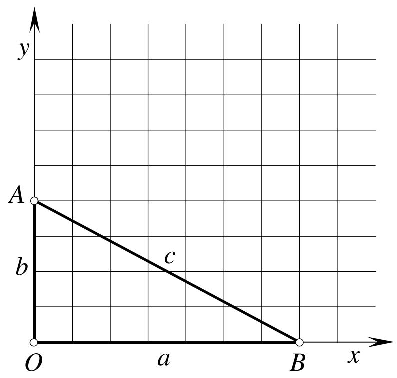
Na osnovi ovih dviju relacija može se zaključiti da će *c* biti (pozitivan) cijeli broj ako i samo ako je $a^2 + b^2$ kvadrat cijelog broja. To pak znači da brojevi *a, b, c* čine tzv. *Pitagorinu trojku brojeva*[4].

Jasno je da duljina *c* stranice cjelobrojnog kvadrata može biti, na primjer

$$c \in \{\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{8}\ ,\ \sqrt{10}\ ,\ \sqrt{13}\ ,\ \sqrt{17}\ ,\ \sqrt{20}\ ,\ \sqrt{26}\ \}$$

jer se svaki od brojeva 2, 5, 8, 10, 13, 17, 20, 26 može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju prirodnih brojeva. Tko je

$$2 = 1^2 + 1^2,\quad 5 = 1^2 + 2^2,\quad 8 = 2^2 + 2^2,\quad 10 = 3^2 + 1^2,\quad \ldots$$



Slika 7.

Istovremeno

$$c \notin \{\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ \sqrt{11}\ ,\ \sqrt{12}\ ,\ \sqrt{14}\ ,\ \sqrt{15}\ \}$$

jer se nijedan od brojeva 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15 ne može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju prirodnih brojeva.

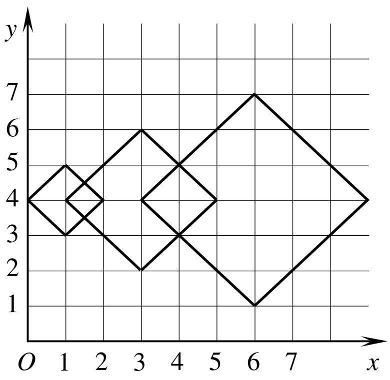
---

[4] *Pitagorine trojke brojeva* su zapravo trojke prirodnih brojeva (*x, y, z*) koje su rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$.

Ako je (*x, y, z*) pitagorina trojka, onda je trokut sa stranicama *x, y, z* pravokutan.

Naziv dolazi po tome što su, po Platonu, pitagorejci našli da je $\left(m,\ \frac{m^2-1}{2},\ \frac{m^2+1}{2}\right)$ takva trojka brojeva za svaki prirodni broj *m*. Opće se rješenje može napisati u obliku $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$.

Pitagorine trojke brojeva poznavali su i stari Babilonci kao i neku (nama još nepoznatu) metodu za njihovo pronalaženje. Tako se na jednoj glinenoj ploči uz jednostavne Pitagorine trojke, kao što je na primjer (3, 4, 5), nalazi i trojka (4961, 6480, 8161). Na toj ploči navedeno je 50 pitagorinih trojki brojeva.



Slika 8.

Vratimo se na trivijalne slučajeve cjelobrojnog kvadrata u kvadratnoj mreži

(*i*) kada stranice kvadrata pripadaju (leže) na crtama mreže (slika 2)

(*ii*) kada dijagonale kvadrata pripadaju (leže) na dijagonalnim crtama mreže (slika 5 i slika 6)

(*iii*) kada dijagonale traženog cjelobrojnog kvadrata leže na crtama kvadratne mreže (slika 8).

Vezano uz trivijalni slučaj (*iii*) lako se možemo uvjeriti da duljina dijagonale kvadrata mora biti paran broj, tj. $d = 2n$, $n \in \mathbf{N}$.

Umjesto zaključka:

U svim razmatranim slučajevima – onim trivijalnim kao i onim u općem obliku – *površina kvadrata* čiji su vrhovi u cjelobrojnim točkama kvadratne mreže izražava se cijelim brojem. I sama ta činjenica opravdava naziv *cjelobrojni kvadrati*.

Literatura

DAJOVIĆ, S. (1987), *Celobrojni kvadrati na kvadratnoj mreži*. U: *Nastava matematike*, XIV (XXXVI), broj 1-2.

HOGBEN, L. (1970), *Sve o matematici*. Zagreb: Mladost.

LJUBKOVIĆ, J. (1996), *Još o znamenkama*. U: *Bjelovarski učitelj*, Bjelovar; br. 3.

KADUM-BOŠNJAK, S. (2000), *Matematika za one koji mogu i žele više – Zbirka zadataka za učenike III. i IV. razreda osnovne škole*. Pula: IGSA.

ŠPORER, Z. (1976), *Uh, ta matematika*. Zagreb: Školska knjiga.

Metodički obzori 10, vol. 5(2010)2
Professional paper
UDK: 514.763.7:373.3
Received: 21. 2. 2009

SQUARE –FULL NUMBERS IN THE SQUARE NETWORK

Vladimir Kadum, PhD
Department of Educational Sciences
Juraj Dobrila University in Pula (Croatia)
e-mail: vladimir.kadum@pu.t-com.hr

A b s t r a c t

In primary school, the square network is mainly used to solve geometrical exercises. The paper deals with other possibilities of its use in teaching mathematics.

The material exhibited in this paper, as a whole, is primarily aimed at those primary school pupils who strive to achieve more, that is, at dealing with young mathematicians (primary school).

Key words: *square full-numbers, geometrical exercises, square network, young mathematicians, teaching mathematics, primary school, pupils who strive to achieve more*