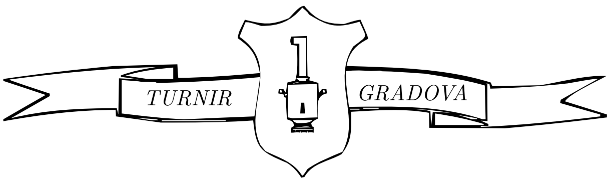
27. turnir gradova – jesenski krug

Ove je godine u Hrvatskoj prvi put održano međunarodno matematičko natjecanje **Turnir gradova**. Pored *Klokana* ovo natjecanje jedno je od najraširenijih natjecanja u svijetu. A po razini je odmah iza MMO-a, s time da zadatci variraju od *lakih* (na razini školskih natjecanja) do *izrazito teških* (na razini najtežih zadataka s MMO-a).



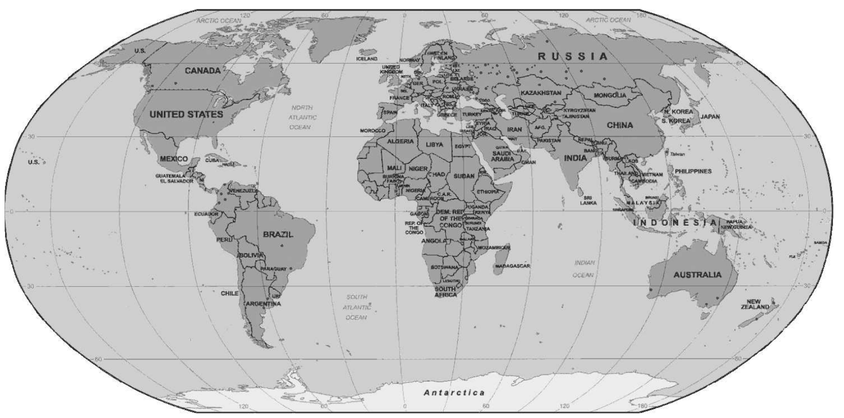
Natjecanje se sastoji od dvaju krugova (jesenskog i proljetnog), od kojih svaki ima dva dijela: 1. (pripremni) i 2. (glavni). Pripremni dio ima lakše zadatke na kojima se može dobiti manje bodova, a glavni dio ima teže zadatke koji i nose više bodova. Broj bodova koje je pojedini natjecatelj stekao u pojedinom krugu izračunava se zbrajanjem bodova iz **triju zadataka** na kojima je učenik osvojio najviše bodova (ne trebate riješiti **sve** zadatke da bi ste osvojili maksimum bodova).

Učenici su podijeljeni u dvije skupine: JUNIORI (1. i 2. razred) i SENIORI (3. i 4. razredi). Bodovi učenika 1. razreda u skupini JUNIORI množe se koeficijentom $\frac{4}{3}$, a bodovi učenika 3. razreda u skupini SENIORI koeficijentom $\frac{5}{4}$.

Rezultat grada izračunava se kao prosjek N učenika koji su osvojili najviše bodova na natjecanju (gdje je $N = \lfloor \frac{\text{BROJ STANOVNIKA GRADA}}{100000} \rfloor$). Ovo je natjecanje i ekipno i pojedinačno. Najbolji pojedinci pozivaju se na *ljetnu konferenciju* Turnira gradova.

Natjecanje organizira **Središnji odbor Turnira gradova** u Moskvi uz pomoć *lokalnih organizatora*. U Hrvatskoj se natjecanje provodi u organizaciji **Hrvatskog matematičkog društva**. Ove godine u natjecanje uključio se grad Zagreb, a traje akcija uključenja i dugih gradova. Natjecanje je održano u V. gimnaziji 22. i 29. listopada 2005. s početkom u 9 sati.

Informacije o natjecanju možete naći na web-stranicama *Turnira gradova u Hrvatskoj* `http://playmath.skolstvo.t-com.hr/turnir` ili na stranicama *Turnira gradova* (na ruskom) `http://www.turgor.ru`



Slika 1. *Rasprostranjenost Turnira gradova*

Međunarodno matematičko natjecanje
27. TURNIR GRADOVA

JESEN 2005.

PRIPREMNI DIO

1. i 2. razredi

1. Dan je trokut ABC. Točke M_1, M_2, M_3 redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a točke H_1, H_2, H_3 nožišta visina na te stranice iz vrhova C, A, B, redom. Dokažite da se od dužina duljina $|H_1M_2|$, $|H_2M_3|$ i $|H_3M_1|$ može sastaviti trokut.

   (Zadatak vrijedi **3 boda**)

2. U svakom vrhu kocke zapisan je broj. U svakom koraku broj zapisan u svakom od vrhova kocke zamijenimo prosjekom triju brojeva koji se nalaze u susjednim vrhovima. Svi brojevi zamijene se istovremeno. Nakon 10 takvih koraka u svakom vrhu kocke nalazi se isti broj kao na početku. Jesu li nužno svi početni brojevi bili međusobno jednaki?

   (Zadatak vrijedi **3 boda**)

3. Dužina jedinične duljine podijeljena je na 11 manjih dužina, od kojih nijedna nije dulja od a. Za koje vrijednosti a možemo zaključiti da se od svake 3 od dobivenih 11 dužina može sastaviti trokut?

   (Zadatak vrijedi **4 boda**)

4. Šahovska figura kreće se prema sljedećim pravilima:

   - može skočiti 8 ili 9 polja vertikalno ($\updownarrow$) ili horizontalno ($\leftrightarrow$);
   - ni na jedno polje ne smije doći 2 puta.

   Koliko najviše polja može obići ova šahovska figura na ploči 15×15 (figura može krenuti s bilo kojeg polja na ploči).

   (Zadatak vrijedi **4 boda**)

5. Dano je 6 novčića od kojih je jedan krivotvoren. (Masa krivotvorenog novčića razlikuje se od mase nekrivotvorenog, ali ništa drugo o njihovim masama nije poznato.) Dana je vaga koja pokazuje masu novčića koji se na njoj važu. Kako možemo naći krivotvoren novčić u tri vaganja?

   (Zadatak vrijedi **5 bodova**)

3. i 4. razredi

1. Mogu li se između dvaju susjednih kvadrata pronaći dva različita kuba? Odnosno, ima li nejednakost
$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$$
   rješenje u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$?

   (Zadatak vrijedi **3 boda**)

2. Zadana je dužina duljine $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Može li se, samo pomoću neoznačenog ravnala i šestara konstruirati dužina duljine 1.

(Zadatak vrijedi **3 boda**)

3. Dano je 6 novčića od kojih je jedan krivotvoren. (Masa krivotvorenog novčića razlikuje se od mase nekrivotvorenog, ali ništa drugo o njihovim masama nije poznato.) Dana je vaga koja pokazuje masu novčića koji se na njoj važu. Kako možemo naći krivotvoren novčić u tri vaganja?

(Zadatak vrijedi **4 boda**)

4. Nad stranicama pravokutnog trokuta ABC konstruirani su kvadrati, a njihova središta označena su s D, E i F. Pokaži da je omjer površina trokuta DEF i trokuta ABC
   (a) veći od 1;
   (b) barem 2.

(Zadatak vrijedi (a)+(b)= $2+2=$**4 boda**)

5. Kocka leži na ravnini i nekoliko je puta preokrenuta (preko svojih bridova), nakon čega se ponovo nalazi na početnoj poziciji s istom stranom prema gore. Može li se dogoditi da je gornja strana zarotirana za 90° u odnosu na svoj početni položaj?

(Zadatak vrijedi **5 bodova**)

GLAVNI DIO

1. i 2. razredi

1. Za prirodan broj kažemo da je palindrom ako se čita jednako slijeva i zdesna (na primjer, brojevi 1, 343 i 2002 su palindromi, a 2005 nije). Je li moguće naći 2005 parova oblika $(n, n+110)$ tako da su u svakome paru oba broja palindromi?

(Zadatak vrijedi **3 boda**)

2. Produžetci stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki K. Poznato je da je $|AD| = |BC|$. Neka su točke M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokažite da je trokut MNK tupokutan.

(Zadatak vrijedi **5 bodova**)

3. Na svakom se polju šahovske ploče nalazi jedan top (kula). U bilo kojem trenutku smijemo maknuti jedan top koji napada neparan broj drugih topova. Koliki je maksimalni broj topova koje možemo maknuti? (Jedan top napada drugi ako se nalaze u istom retku ili stupcu i ako između njih nema ni jednog drugog topa.)

(Zadatak vrijedi **6 bodova**)

4. Dva mrava pomiču se duž ruba stola oblika mnogokuta. Sve stranice toga stola dulje su od 1 metar, a udaljenost između mrava uvijek je jednaka 10 cm. Na početku se oba mrava nalaze na istoj strani stola.
   (a) Pretpostavimo da je stol konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da na kraju svaki mrav posjeti svaku točku ruba stola barem jednom?

(b) Pretpostavimo da stol nije nužno konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da svaku točku ruba stola posjeti barem jedan mrav?

(Zadatak vrijedi (a) + (b) = 2 + 4 = **6 bodova**)

5. Pronađite najveći prirodan broj N za koji jednadžba

$$99x + 100y + 101z = N$$

ima jedinstveno rješenje x, y, z, pri čemu su ovi brojevi prirodni.

(Zadatak vrijedi **7 bodova**)

6. Karlson (koji živi na tavanu) ima na raspolaganju 1000 posuda marmelade. Posude nisu nužno jednake, ali nijedna ne sadrži više od jedne stotine ukupne količine marmelade. Za doručak Karlson može pojesti jednaku količinu marmelade iz bilo kojih 100 posuda koje odabere. Dokaži da Karlson može nakon nekoliko doručaka pojesti svu marmeladu.

(Zadatak vrijedi **8 bodova**)

3. i 4. razredi

1. Za koje je n moguće pronaći različite prirodne brojeve $a_1, a_2 \ldots, a_n$ takve da je suma

$$a_1/a_2 + a_2/a_3 + \ldots + a_n/a_1$$

cijeli broj?

(Zadatak vrijedi **3 boda**)

2. Dva mrava pomiču se duž ruba stola oblika mnogokuta. Sve stranice toga stola dulje su od 1 metar, a udaljenost između mrava uvijek je jednaka 10 cm. Na početku se oba mrava nalaze na istoj strani stola.

   (a) Pretpostavimo da je stol konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da na kraju svaki mrav posjeti svaku točku ruba stola barem jednom?

   (b) Pretpostavimo da stol nije nužno konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da svaku točku ruba stola posjeti barem jedan mrav?

(Zadatak vrijedi (a) + (b) = 2 + 3 = **5 bodova**)

3. Na svakom se polju šahovske ploče nalazi jedan top (kula). U bilo kojem trenutku smijemo maknuti jedan top koji napada neparan broj drugih topova. Koliki je maksimalni broj topova koje možemo maknuti? (Jedan top napada drugi ako se nalaze u istom retku ili stupcu i ako između njih nema ni jednog drugog topa.)

(Zadatak vrijedi **6 bodova**)

4. Nekoliko pozitivnih brojeva manjih ili jednakih 1 zapisano je na kružnici. Dokaži da se kružnica može podijeliti na tri kružna luka tako da se zbroj brojeva na bilo koja dva luka razlikuje za najviše 1. (Ako na kružnom luku nema brojeva, onda je zbroj jednak nuli.)

(Zadatak vrijedi **6 bodova**)

5. U trokutu ABC, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ su simetrale kutova. Poznato je da omjer veličina kutova $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ iznosi $4:2:1$. Dokaži da je $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.

(Zadatak vrijedi **7 bodova**)

6. Na ploču se u svakom trenutku smije ili zapisati dvije jedinice ili izbrisati dva ista broja n i zamijeniti ih s $n+1$ i $n-1$. Koliki je najmanji broj ovakvih operacija potreban da bi se na ploči pojavio broj 2005. (Na početku je ploča bila prazna.)

(Zadatak vrijedi **8 bodova**)

Rezultati

Sve nas vjerojatno zanimaju rezultati. Rezultati koje vidite ovdje **privremeni** su lokalni rezultati. Konačne rezultate znat ćemo tek nakon što radove učenika pregleda i konačno ocijeni središnji odbor. No i oni nam nešto govore

RANG	IME I PREZIME	ŠKOLA	RAZRED	O DIO	A DIO	UKUPNO	KONAČNO*
1.	Ivan Šandrk	V. gimnazija	2.	9	6	9	9.00
2.	Petar Mlinarić	XV. gimnazija	1.	6	2	6	8.00
2.	Marko Magerl	XV. gimnazija	1.	6	0	6	8.00
2.	Zorana Ćurković	V. gimnazija	1.	6	0	6	8.00
5.	Goran Grdenić	V. gimnazija	1.	5	2	5	6.66
6.	Ivo Sluganović	V. gimnazija	2.	-	6	6	6.00
7.	Melkior Ornik	XV. gimnazija	2.	6	4	6	6.00
8.	Goran Žužić	V. gimnazija	1.	-	4	4	5.33
9.	Ivan Gavran	V. gimnazija	2.	1	4	4	4.00
9.	Emil Kolundžić	V. gimnazija	2.	4	0	4	4.00
9.	Ana Kontrec	V. gimnazija	1.	3	0	3	4.00

RANG	IME I PREZIME	ŠKOLA	RAZRED	O DIO	A DIO	UKUPNO	KONAČNO*
1.	Goran Dražić	V. gimnazija	4.	13	18	18	18.00
2.	Nikola Adžaga	V. gimnazija	3.	12	5	12	15.00
3.	Petar Sirković	V. gimnazija	3.	11	4	11	13.75
4.	Ivan Sudić	V. gimnazija	3.	1	10	10	12.50
5.	Tomislav Grbin	XV. gimnazija	4.	12	-	12	12.00
6.	Saša Stanko	V. gimnazija	3.	9	4	9	11.25
7.	Iva Kasum	V. gimnazija	4.	11	2	11	11.00
8.	Marko Popović	V. gimnazija	4.	10	11	11	11.00
9.	Ivan Cesar	XV. gimnazija	4.	7	-	7	7.00

*KONAČNO - označava rezultate nakon što se uzme u obzir razred

UKUPNO je bilo moguće osvojiti **21 bod**

Iz 1. i 2. razreda sudjelovalo je 17 učenika, a iz 3. i 4. razreda 10 učenika. Trenutni rezultat grada Zagreba je 13.25.

S obzirom da je ovo međunarodno natjecanje, čitatelje sigurno zanima kako su drugi gradovi prošli. Usporedbe radi donosimo vam rezultate iz Moskve. Kako neki bodovi nisu cjelobrojni donosimo statistiku po intervalima.

Prvo rezultati 8. razreda (prva tablica) i 9. razreda (druga tablica) u Moskvi (1. i 2. razred u Hrvatskoj)

BODOVI	BROJ UČENIKA
$[0,4\rangle$	69
$[4,8\rangle$	10
$[8,12\rangle$	2
$[12,15\rangle$	2
$[15,+\infty\rangle$	0

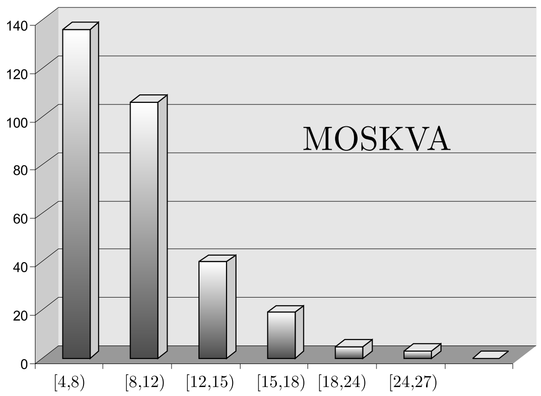
BODOVI	BROJ UČENIKA
$[0,4\rangle$	131
$[4,8\rangle$	28
$[8,12\rangle$	28
$[12,15\rangle$	7
$[15,18\rangle$	3
$[18,+\infty\rangle$	0

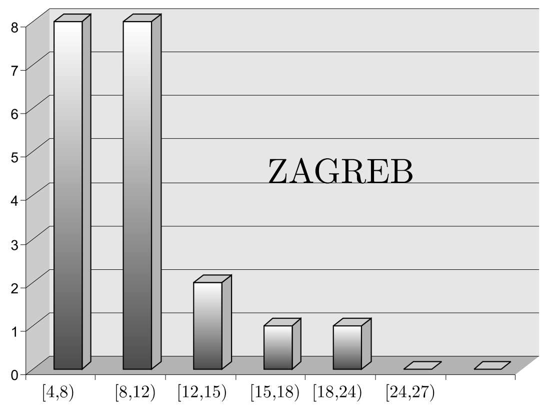
Rezultati 10. i 11. razreda u Moskvi (3. i 4. razred u Hrvatskoj):

BODOVI	BROJ UČENIKA
$[0,4\rangle$	189
$[4,8\rangle$	42
$[8,12\rangle$	23
$[12,15\rangle$	12
$[15,18\rangle$	10
$[18,24\rangle$	2
$[24,27\rangle$	3
$[27,+\infty\rangle$	0

BODOVI	BROJ UČENIKA
$[0,4\rangle$	138
$[4,8\rangle$	56
$[8,12\rangle$	53
$[12,15\rangle$	19
$[15,18\rangle$	6
$[18,21\rangle$	3
$[21,+\infty\rangle$	0

Evo grafičke usporedbe broja učenika koji su postigli bar 4 boda u Moskvi i Zagrebu.





Za kraj spomenimo sve koji su sudjelovali u organizaciji Turnira gradova. Natjecanje su organizirali i radove učenika ispravili:

- Matija Bašić
- Dijana Kreso
- Rudi Mrazović
- Nikola Grubišić
- Kristina Škreb
- Višnja Polić
- Tvrtko Tadić

Časopis *PlayMath* pružio je stručnu, tehničku i medijsku podršku. Posebno se zahvaljujemo V. gimnaziji što je bila domaćin ovog natjecanja.

Hrvatski odbor za Turnir gradova

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 50.