Problemi s polinomima

U ovom ćemo članku pokazati kako se rješavaju neki zadatci vezani uz polinome. Zato prvo objasnimo neke pojmove i navedimo iskaze teorema koje ćemo pritom koristiti.

Definicija* 1. Polinom** (jedne varijable) je funkcija realnog ili kompleksnog argumenta x koju možemo zapisati u obliku $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}_0, a_n \neq 0$ ako je $n \geq 1$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ zovemo ***koeficijenti polinoma P, broj a_0 ***slobodni član***, a a_n ***vodeći član***. Broj n zovemo *stupanj* polinoma ($\operatorname{st} P = n$)
***Definicija* 2. Korijen** ili **nultočka** polinoma $P(x)$ je svaki x koji zadovoljava jednadžbu $P(x) = 0$.

Teorem 1. Neka su $P(x), Q(x)$ proizvoljni polinomi i $Q(x) \not\equiv 0$. Tada postoji jedinstveni polinomi $S(x), R(x)$ takav da je

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

i da je $R(x) \equiv 0$ ili $\operatorname{st} R < \operatorname{st} Q$. Polinom $R(x)$ zovemo ostatak dijeljenja polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Ako je $R(x) \equiv 0$ onda kažemo da je $P(x)$ djeljiv s $Q(x)$.

Primjer 1. Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ sa $Q(x) = x^3 - x$.

Rješenje. Znamo da je ostatak $R(x)$ jedinstveni polinom takav da je $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ i da je $\operatorname{st} R < \operatorname{st} Q$. Zato pretpostavimo da je $R(x) = ax^2 + bx + c$. Odredimo brojeve a, b, c. To ćemo učiniti tako da u $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ uvrstimo nultočke polinoma $Q(x)$. Tako ćemo 'se izvući' a da ne znamo što je $S(x)$.
Očito je da je $Q(x) = x(x-1)(x+1)$, pa su njegove nultočke 0, 1, -1. Dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = c \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 5 = a + b + c \\ x = -1 \quad &\Rightarrow \quad -5 = a - b + c \end{aligned}$$

rješenje kojeg je $a = 0$, $b = 5$, $c = 0$. Dakle, $R(x) = 5x$. ✓

Zadatak 1. Odredi a, b, c takve da je $P(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ djeljiv sa $x + 2$, a ostatak pri dijeljenju sa $(x^2 - 1)$ je $(x - 2)$.

Teorem 2. Polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^n + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ jednaki su ako i samo ako $n = m$ i $a_k = b_k$, za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Također, dva polinoma istog stupnja (n) jednaka su ako se podudaraju u barem $n + 1$ točki.
Teorem 3. Polinom $P(x)$ djeljiv je s polinomom $x - x_0$ ako i samo ako je x_0 nultočka polinoma $P(x)$.
Teorem 4. (Osnovni teorem algebre) Svaki polinom $P(x)$ stupnja $n \geq 1$ ima točno n kompleksnih korijena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i može se na jedinstven način (na poredak faktora) zapisati u obliku $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

Teorem 5. (Lagrangeov interpolacijski teorem) Neka su zadani različiti brojevi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i proizvoljne vrijednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Tada postoji jedinstven polinom $P(x)$ stupnja ne većeg od n za kojeg vrijedi $P(x_k) = y_k, k = 0, 1, \ldots, n$. Taj polinom je dan sa

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

Primjer 2. (Pi Mu Epsilon, 1964.) Odredi koliko je $P(n+1)$ ako je $P(x)$ polinom stupnja n i $P(k) = 2^k$ za $k = 0, 1, 2, .., n$.

Rješenje. Prema teoremu 5. vrijedi da je

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(n+1-x_0) \cdots (n+1-x_{k-1})(n+1-x_{k+1}) \cdots (n+1-x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k)k!(-1)^{n-k}(n-k)!} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k+1} 2^k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k+1} 2^k + 2^{n+1} = (1-2)^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

✓

Zadatak 2. (USAMO 1975.)Odredi koliko je $P(n+1)$ ako je $P(x)$ polinom stupnja n i $P(k) = \frac{k}{k+1}$ za $k = 0, 1, 2, .., n$.

Zadatak 3. (Prijedlog za MMO 1983.) Odredi koliko je $P(n+1)$ ako je $P(x)$ polinom stupnja n i $P(k) = \dfrac{1}{\binom{n+1}{k}}$ za $k = 0, 1, 2, .., n$.

Primjer 3. (Prijedlog za MMO 1983.) Neka je $(F_n)_n$ Fibonaccijev niz, a $P(x)$ polinom stupnja 1001 takav da je $P(k) = F_k$ za $k = 1003, \ldots, 2004$. Dokaži da je $P(2005) = F_{2005} - 1$.

Rješenje. Neka je $P_n(x)$ polinom stupnja n takav da je $P_n(x) = F_k$ za $k = n+2, n+3, \ldots, 2n+2$. Pokažimo da je tada $P_n(2n+3) = F_{2n+3} - 1$.
Očito je $P_0(1) = 1$ i tvrdnja vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi za $P_{n-1}(x)$ i promotrimo $P_n(x)$. Polinom

$$Q(x) = P_n(x+2) - P_n(x+1)$$

najviše je stupnja $n-1$, a vrijedi $Q(k) = P_n(k+2) - P_n(k+1) = F_{k+2} - F_{k+1} = F_k$ za $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$. Zato se $Q(x)$ i $P_{n-1}(x)$ podudaraju u n točaka, pa je $Q(x) = P_{n-1}(x)$ za sve x. Uz induktivnu pretpostavku $P_{n-1}(2n+1) = F_{2n+1} - 1$, dobivamo

$$P_n(2n+3) = F_{2n+2} + F_{2n+1} - 1 = F_{2n+3} - 1.$$

✓

Primjer 4. Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Očito je jedno rješenje: $P(x) \equiv 0$. Nađimo ostala. Uvedimo prvo supstituciju $y = x-1$. Tada jednadžba, prelazi u $P(y^2-1) = (P(y-1))^2$. Uvedimo još $Q(y) = P(y-1)$. Tada je $Q(y^2) = (Q(y))^2, \forall y \in \mathbb{R}$.
Zapišimo $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Pretpostavimo da nisu svi brojevi $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nula. Neka je $k < n$ najveći broj takav da je $a_k \neq 0$. Uvrstimo li sad $Q(x)$ u jednadžbu dobivamo:

$$a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + \cdots + a_1 x^2 + a_0 = Q(x^2) = (Q(x))^2 = (a_n x^n + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)^2.$$

Prema teoremu 2 sada slijedi (izjednačavanjem koeficijenata uz x^{n+k}) $0 = 2a_n a_k$. Kontradikcija!
Zato mora biti $a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$ i $Q(x) = a_n x^n$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}$, iz čega slijedi da je $a_n = 1$.
Sada dobivamo rješenje početnog problema $P(x) = (x+1)^n$. ✓

Zadatak 4. Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
Zadatak 5. Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $(x-3)P(x+1) - (x+3)P(x-2) = 3x(x^2-9)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 5. (MMO 2004.) Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednakost $P(a-b) + P(b-c) = P(c-a) = 2P(a+b+c)$ za sve realne brojeve a, b, c takve da je $ab+bc+ca = 0$.

Rješenje. Za svaki realan broj x trojka $(a, b, c) = (6x, 3x, -2x)$ zadovoljava $ab+bc+ca = 0$. Za ovu trojku iz dane jednadžbe slijedi

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, prema teoremu 2., dobivamo

$$(3^k + 5^k + (-8)^k - 2 \cdot 7^k)a_k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Budući da je izraz u zagradi negativan za neparne k, a pozitivan za $k = 0$ i za sve parne $k \geq 6$, izraz je jednak 0 samo za $k = 2$ i $k = 4$. Zato je $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Provjerom još samo treba potvrditi da je to zaista rješenje. ✓

Zadatak 6. (IMC 2005.) Nađi sve polinome $P(x)$ kojima su sve nultočke racionalne i zadovoljavaju uvjet da je $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ permutacija brojeva $(0, 1, 2, \ldots, n)$.

Primjer 6. Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $P(x^2)+P(x)P(x+1) = 0$.

Rješenje. Uočimo da iz $P(z) = 0$ slijedi $P(z^2) = 0$. No, kako je broj nultočki polinoma konačan, mora vrijediti $|z| = 1$ ili $z = 0$, odnosno sve nultočke u kompleksnoj ravnini moraju se nalaziti u ishodištu ili na jediničnoj kružnici oko ishodišta.
Također zbog $P(z) = 0$ slijedi $P((z-1)^2) = 0$. Zato se sve nultočke nalaze u točki 1 i na jediničnoj kružnici oko 1.
Presjek tih dvaju skupova su 0 i 1. Zato je po teoremu 3:

$$P(x) = ax^m(x-1)^n.$$

Uvrstimo li ovo u jednadžbu, dobivamo

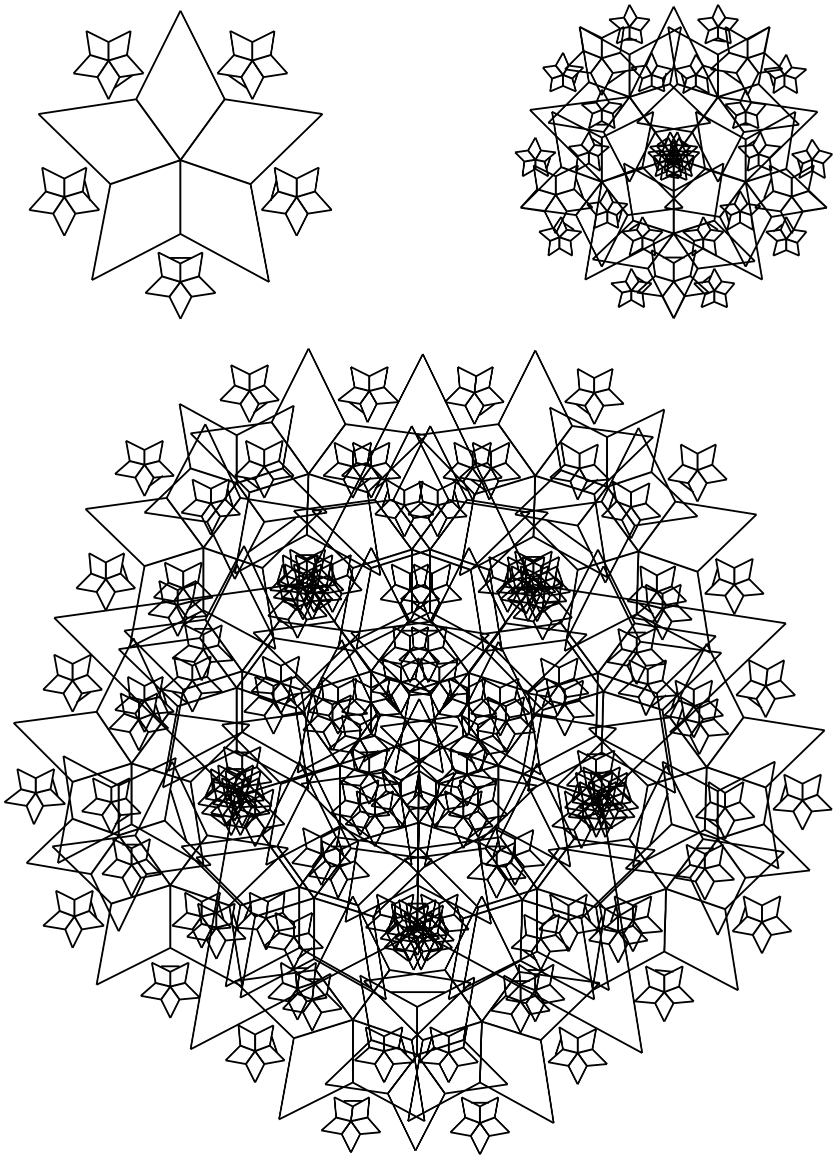
$$ax^{2m}(x^2-1)^n + ax^m(x-1)^n a(x+1)^m x^n = 0.$$

Ako je $a = 0$, tada je $P(x) \equiv 0$. Ako je $a \neq 0$, onda je $1 + ax^{n-m}(x+1)^m - n = 0$, iz čega slijedi: $n = m, a = -1$, i rješenje je:

$$P(x) = -x^n(x-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

✓

Zadatak 7. Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu $P(x^2 + x + 1) = P(x)P(x+1)$.



Još jedna fraktalna pahuljica