

Utjecaj parametara jednog modela Zemljine kore i gornjeg plašta na disperziju Rayleighovih valova

Davorka Herak i Marijan Herak

Geofizički zavod, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Primljeno 9. studenog 1983.

UDK 550.340

U radu smo razmatrali utjecaj promjena parametara modela Zemljine kore i gornjeg plašta na krivulje disperzije grupne brzine Rayleighovih valova. Rezultat takve analize potreban je kao prvi korak pri pokušaju rješavanja inverznog problema.

Računate su parcijalne derivacije grupne brzine s obzirom na brzinu transverzalnih valova, gustoću i debljinu pojedinog sloja za kontinentalni model PEM (Dziewonski i dr. (1975)). Model smo modificirali dodavanjem tankog sloja sedimenata na njegov vrh. Za račun krivulja korištena je Thompson-Haskellova matrična metoda.

Influence of parameters of an earth's crust and upper mantle model on Rayleigh waves dispersion

In this paper we considered the influences of the changes of the crust and upper mantle earth model parameters on the Rayleigh waves group velocity dispersion. Final result of such analysis is necessary as the first step in the inversion of dispersion data for the earth interior.

The partial derivatives of the group velocity with respect to the shear wave velocity β density ρ and the layer thickness d were calculated for the continental earth model PEM of Dziewonski et al. (1975.), (Table 1). We have modified the model by adding a thin sedimentary layer on top of it. The Thompson-Haskell matrix method (see Appendix) was used for the calculation of theoretical phase velocity dispersion curves with and without taking earth sphericity into account (Fig. 1). Partial derivatives were calculated by the finite differences method (equations (1), (2)). Figures 2, 3 and 4 represent the partial derivatives curves with respect to β , ρ and d , respectively. The numbers on the curves denote the layers in which the parameter in question was changed.

The conclusions of the analysis are the following:

(i) Shear wave velocity shows the greatest influence upon the group velocity of Rayleigh waves. The influence of the layer thickness is more expressed, the thinner the layer is.

(ii) Partial derivatives with respect to β have peaks for periods that correspond to wave lengths of 3.45–3.80h (h being the depth to the middle of the layer) except for the fourth layer where the wave length equals 3.15h.

(iii) Changing the layer thickness results mainly in shifting the group velocity curves toward smaller or greater periods without changing the value of the neighbouring extreme.

1. Uvod

U ovom radu dan je prikaz utjecaja promjene parametara modela zemljine kore i gornjeg plašta na disperziju grupne brzine Rayleighevih valova. Krajnji rezultat takve vrste istraživanja je nužan i neophodan kao početni korak pri inverziji podataka o disperziji površinskih valova. Naime, otkad se shvatilo da površinski valovi mogu ukazati na strukturu gornjeg dijela Zemlje počelo se i s njihovom primjenom u interpretaciji građe litosfere.

Cilj ovog rada je proučiti utjecaj pojedinih parametara kontinentalnog modela na disperziju grupne brzine osnovnog moda Rayleighevih valova. Kao što je ranije pokazano (Mišković, 1983.) na krivulju disperzije najveći utjecaj imaju brzine transversalnih valova potresa, te gustoća i debljina slojeva modela, dok se utjecaj brzine longitudinalnih valova može zanemariti.

Za računanje parcijalnih derivacija grupne brzine Rayleighevih valova s obzirom na promjene parametara modela korišten je kontinentalni parametrički model Zemlje, PEM, Dziewonskog i dr. (1975.). Stacey (1977.) je u svojoj knjizi naveo taj model kao jedan od reprezentativnih modela Zemlje. Noviji, parametrički referentni model Zemlje, PREM, istih autora iz 1981. g. nije korišten jer sadrži vodeni sloj i izveden je uz pretpostavku anizotropije što u ovom radu nije uzeto u obzir. Oba spomenuta modela (PEM i PREM) imaju analitički definirane brzine seizmičkih valova i gustoću kao funkcije radijusa Zemlje, te je prema tim relacijama izračunat model Zemlje koji je korišten u ovom radu.

Razlog za odabiranje grupne brzine kao podloge za računanje parcijalnih derivacija je taj što je pokazano da inverzija grupne brzine daje finiju strukturu Zemlje od fazne brzine (Yu, Mitchell, 1979.). To svojstvo potječe direktno iz prirode grupne brzine kao derivacije fazne brzine, te stoga male promjene fazne brzine daju velike promjene grupne brzine. Uz to, grupna se brzina mnogo lakše mjeri, a dovoljni su podaci samo s jedne seizmološke postaje.

2. Model Zemlje

Kontinentalni model PEM zemljine kore i gornjeg plašta modificirali smo dodavanjem tankog sedimentnog sloja. Model se sastoji od sedam izotropnih slojeva iznad izotropnog poluprostora. Ukupna debljina slojeva je 420 km. Na dubini između 120 i 220 km nalazi se sloj s negativnim gradijentom brzina (LVZ).

Izbor broja slojeva ispod kore uvjetovan je s jedne strane realističnošću modela, a s druge strane brzinom računanja na raspoloživom elektroničkom računalu. Kako smo mi radili s relativno sporim mikroračunalom KOPA 1500 (PDT 11/150) gornji plašt je podijeljen na četiri dijela koji u velikoj mjeri odražavaju realističnost strukture. Numerički podaci su prikazani u tablici 1.

Thompson-Haskellovom matricnom metodom izračunata je krivulja disperzije fazne i grupne brzine Rayleighevih valova i to za nezakrivljeni i zakrivljeni model PEM (sl. 1).

Tablica 1. Model Zemlje PEM, Dziewonskog i dr., 1975. (Stacey, 1977.)
 Table 1. PEM Earth model, Dziewonski et al., 1975. (Stacey, 1977.)

Sloj	P brzina (km/s)	S brzina (km/s)	Gustoća (g/cm ³)	Debljina (km)	Dubina do dna sloja (km)
1	4.00	2.00	2.20	1.0	1.0
2	5.80	3.45	2.72	19.0	20.0
3	6.50	3.75	2.92	15.0	35.0
4	8.02	4.69	3.34	85.0	120.0
5	7.8475	4.4586	3.402	100.0	220.0
6	8.472	4.463	3.456	80.0	300.0
7	8.97	4.73	3.517	120.0	420.0
8	9.81	5.27	3.93	∞	∞

3. Računanje parcijalnih derivacija grupne brzine Rayleighevih valova

Zbog nužnosti poznavanja parcijalnih derivacija s obzirom na parametre modela pri postupku inverzije, pojedini autori su primijenili različite metode s pomoću kojih su proveli odgovarajući račun. Derivacije fazne brzine moguće je odrediti analitički primjenom Thompson-Haskellove ili analogne metode (Jin i Herrin, 1980.). Međutim, da bi se proveo takav postupak treba imati brzo i precizno računalo. Derivacije grupne brzine nije moguće računati direktno, pa je korištenje numeričkih metoda neizbježno. Tako je, npr., u postupku Rodija i dr. (1975.), potrebno poznavati iznose fazne i grupne brzine, ali i derivacije fazne brzine po parametrima modela u dvije međusobno blize točke.

Najjednostavnija metoda računanja parcijalnih derivacija grupne brzine U po nekom parametru M modela je metoda aproksimiranja diferencijala konačnim razlikama:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\Delta U}{\Delta M} = \frac{U_2 - U_1}{M_2 - M_1} \quad (1)$$

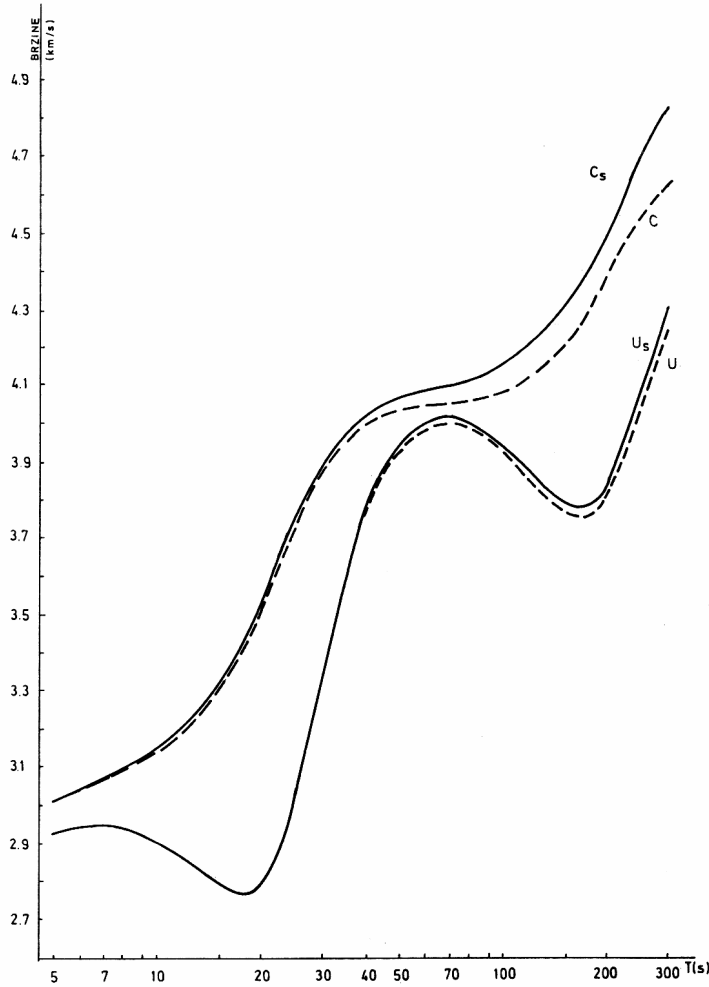
Grupne brzine se računaju numerički po formuli

$$U = \frac{c^2}{T \frac{dc}{dT} + c},$$

koja se aproksimira s

$$U = \frac{\frac{1}{2} (c_1 + c_2)^2}{(T_1 + T_2) \frac{c_2 - c_1}{T_2 - T_1} + (c_1 + c_2)}, \quad (2)$$

gdje je c fazna brzina, U grupna brzina, T period.



Slika 1. Fazne i grupne brzine Rayleighevih valova za model PEM u ravnom (c, U) i zakrivljenom (c_s, U_s) sredstvu.

Figure 1 Phase and group velocities of Rayleigh waves for model PEM in flat (c, U) and spherical (c_s, U_s) medium.

Iz (1) i (2) je vidljivo da je za svaku parcijalnu derivaciju potrebno naći korijen disperzione jednadžbe četiri puta.

Za iterativno rješavanje disperzione jednadžbe korištena je Thompson-Haske-lova matična metoda, detaljnije objašnjena u Prilogu. Kako se tom metodom može izračunati teorijska disperzija samo za idealizirane, ravne modele Zemlje, rezultate je bilo potrebno korigirati. Dziewonski i dr. (1976.) su izveli izraz za računanje faznih brzina u sferičnom sredstvu, c_s , na osnovi poznavanja fazne i grupne brzine u ravnom slojevitom poluprostoru:

$$c_s = c + 0.00016 UT$$

Brune i Dorman (1963.) i Dziewonski i dr. (1976.) su pokazali kako je utjecaj zakrivljenosti na grupnu brzinu znatno manji nego na faznu, pa je prema Jinu i Herrinu (1980.) uzeto:

$$U_s - U = 0.25 (c_s - c).$$

Brzina izračunavanja fazne brzine na računalu ovisi o broju slojeva od kojih je sastavljen model, te o traženoj točnosti fazne brzine. Pokazalo se da se na računalu KOPA 1500 točnost od najmanje $1 \cdot 10^{-4}$ km/s postiže s najviše 12 iteracija. Vrijeme potrebno za računanje fazne brzine u modelu sa 7 slojeva iznad poluprostora i maksimalno 12 iteracija iznosi približno 25 sekundi po periodu, što znači da je za račun svake točke na krivuljama parcijalnih derivacija potrebno oko 100 s. Za svaku krivulju računato je po 24 točke u rasponu perioda 5–300 s. Ako se zna da je bilo potrebno izračunati 23 krivulje, ukupno vrijeme rada stroja iznosi nešto više od 15 sati. Tako dugo računanje moguće je pokušati skratiti efikasnijim iterativnim postupkom, modifikacijom Thompson-Haskellove metode ili nekim drugim načinom, ali će ono ipak biti predugo za rutinsku primjenu na spomenutom računalu.

4. Rezultati

Parcijalne derivacije grupne brzine Rayleighevih valova s obzirom na brzinu β transverzalnih valova, gustoću ρ i debljine d slojeva računane su prema relaciji (1).

Parametar M je trebalo odrediti tako da razlika ΔU bude po iznosu veća od 10^{-3} km/s, kolika je i približna granica točnosti izračunatih grupnih brzina. Izbor $\Delta \beta = 0.025\beta$, $\Delta \rho = 0.02 \rho$ i $\Delta d = 0.1d$ zadovoljava navedeni uvjet.

Zbog zanemarivog utjecaja brzine longitudinalnih valova na grupnu brzinu Rayleighevih valova parcijalne derivacije za taj parametar nisu ni određivane.

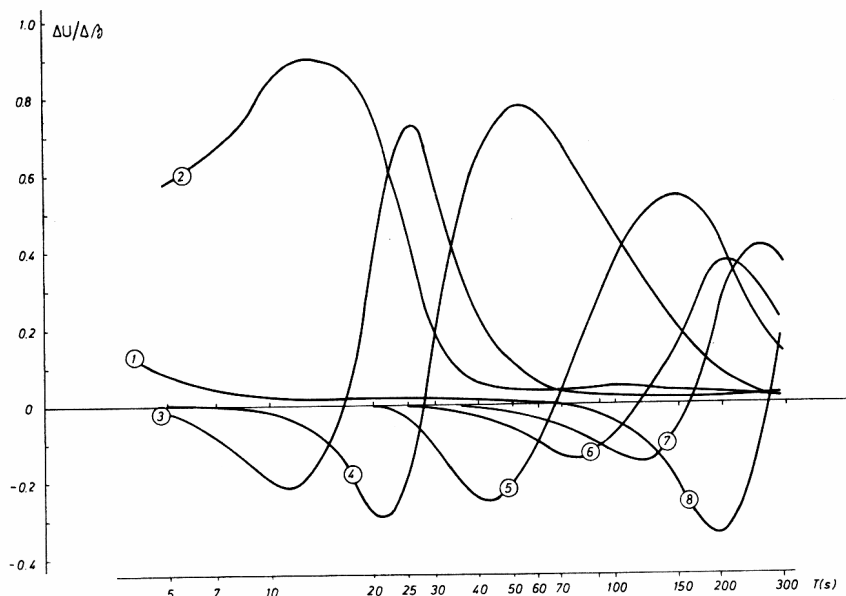
Parcijalne derivacije grupne brzine obzirom na β , ρ i d prikazane su na slikama 2, 3 i 4. Broj na svakoj krivulji označava odgovarajući sloj u kojem je mijenjan pojedini parametar.

Slika 2 prikazuje parcijalne derivacije grupne brzine Rayleighevih valova s obzirom na brzinu transverzalnih valova u rasponu perioda od 5 do 300 s. Vidi se da u tom intervalu perioda najveći utjecaj imaju slojevi 2, 3 i 4, što je i razumljivo. Prvi sloj ima najveći utjecaj ispod 5 sekundi, a zanemariv na periodima većim od 10 sekundi, zbog svoje male debljine. Osim toga, krivulja za prvi sloj ima drugačiji oblik od ostalih iz istog razloga.

Može se primijetiti da se maksimum parcijalne derivacije po β pomiče prema većim periodima kako ukupna debljina slojeva raste, te da su kod ovih krivulja slabo izraženi minimumi. Za model PEM krivulje parcijalnih derivacija grupne brzine po β imaju maksimum na periodu koji odgovara valnoj duljini od oko 3.45 – 3.8 h, osim za četvrti sloj gdje taj broj iznosi 3.15 h (h je dubina do središta promatranog sloja). To je broj koji je vrlo koristan pri kvalitativnoj usporedbi empirijskih i teorijskih vrijednosti grupne brzine.

Krivulje za derivacije po ρ (sl. 3) imaju nešto drugačiji oblik, koji se sastoji od 2 minimuma simetrično postavljena oko maksimuma, osim za dva najgornja sloja. Maksimum krivulja se nalazi na malim, a minimum na većim periodima, uz izuzeće prvog sloja.

Usporedbom oblika krivulja derivacija za gustoću i brzinu β , vidi se da za prva dva sloja one imaju bitno različit oblik i suprotan predznak. To općenito znači da porast



Slika 2. Parcijalne derivacije grupe brzine Rayleighevih valova s obzirom na brzinu transverzalnih valova za model PEM. U i β izraženi su u km/s.

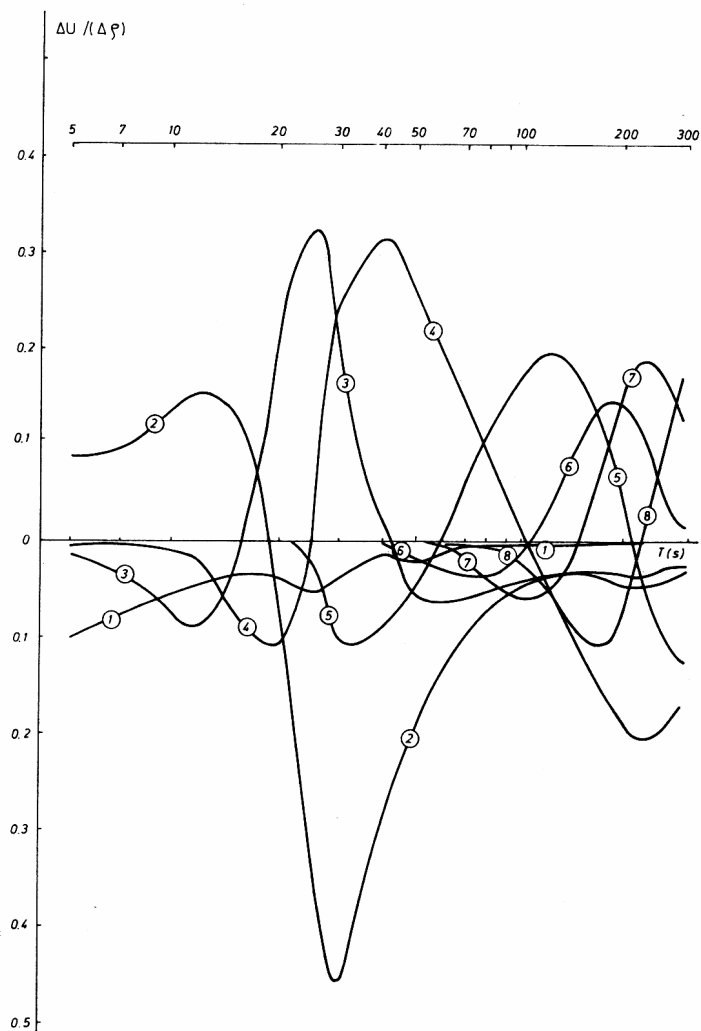
Figure 2 Partial derivatives of Rayleigh wave group velocities with respect to transversal waves velocity (PEM). The numbers on curves denote the layer in which the parameter (β) was varied. U and β are expressed in km/s.

gustoće u jednom od ta dva sloja djeluje kao nešto veći pad brzine u tom sloju. Krivulje parcijalnih derivacija po ρ i β za 3. do 8. sloj imaju u načelu isti oblik, osim što krivulje za β nemaju drugi minimum. Također se vidi da su amplitude parcijalnih derivacija s obzirom na β znatno veće od amplitude derivacija po ρ .

Parcijalne derivacije po debljini d slojeva prikazane su na slici 4. Budući da su debljine slojeva veoma različite iznosi parcijalnih derivacija ($\Delta U/\Delta d$) bi u debljim slojevima bili znatno niži nego u tanjim. Da se to izbjegne, krivulje na slici 4 su normirane množenjem ($\Delta U/\Delta d$) faktorom 0.1 d . To ujedno znači ($\Delta d = 0.1 d$) da su prikazane promjene grupe brzine kad se debljina pojedinog sloja promijeni 10%.

Krivulje parcijalnih derivacija po d su posve različitog oblika u usporedbi s naprijed opisanim. Imaju izraženi minimum pri manjim periodima za najgornja tri sloja, a promjene debljina slojeva pokazuju izraženi maksimum i još jedan minimum pri većim periodima. Također se vidi da promjene debljina slojeva nemaju bitnog utjecaja na grupnu brzinu oko 17, 70 i 170 s. Usporedba sa slikom 1 pokazuje da se Airyve faze nalaze baš oko tih perioda, što znači da će se u tom području krivulje pomicati u stranu (sl. 9 i 10). Isti rezultat je dobijen u Mišković (1983.) za modificirani Jeffreys-Bullenov model.

Da bi se zornije pokazao utjecaj promjene parametara modela na krivulju disperzije, na slikama 5 do 10 prikazane su krivulje disperzije u slučajevima povećane odnosno smanjene vrijednosti pojedinog parametra (β , ρ i d) polaznog modela PEM. Odabrani su najinteresantniji primjeri, promjene u slojevima 2 i 5. Naime, sloj 2, kao površinski sloj, daje po iznosu najveće vrijednosti parcijalnih derivacija, a sloj 5 ima negativni gradient brzina.

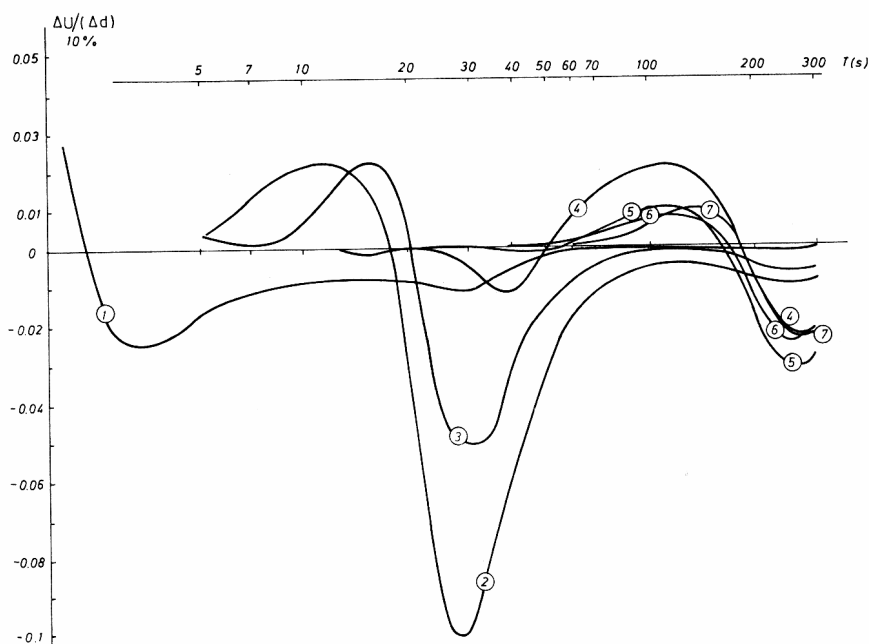


Slika 3. Parcijalne derivacije grupne brzine Rayleighevih valova s obzirom na gustoću ρ za model PEM. Grupna brzina i parametar ρ su izraženi u km/s, odnosno g/cm^3 .

Figure 3 Partial derivatives of Rayleigh waves group velocity with respect to density (PEM). U and ρ are expressed in km/s and g/cm^3 respectively.

Slike 5 i 6 prikazuju krivulje disperzije grupne brzine u slučaju promjene brzine transverzalnih valova u drugom, odnosno petom sloju.

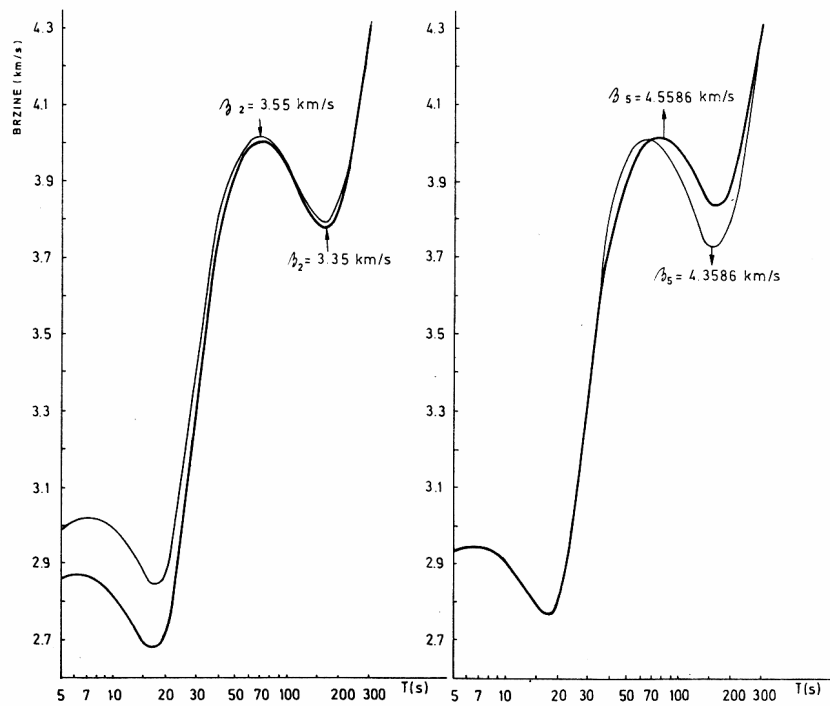
Slike 7 i 8 prikazuju krivulje disperzije grupne brzine u slučaju promjene gustoće u drugom i petom sloju, dok su na slikama 9 i 10 nacrtane krivulje disperzije u slučaju promjene debljine drugog odnosno petog sloja.



Slika 4. Parcijalne derivacije grupne brzine Rayleighevih valova s obzirom na debljinu d slojeva za model PEM. Grupna brzina U i parametar d izraženi su u km/s, odnosno km.

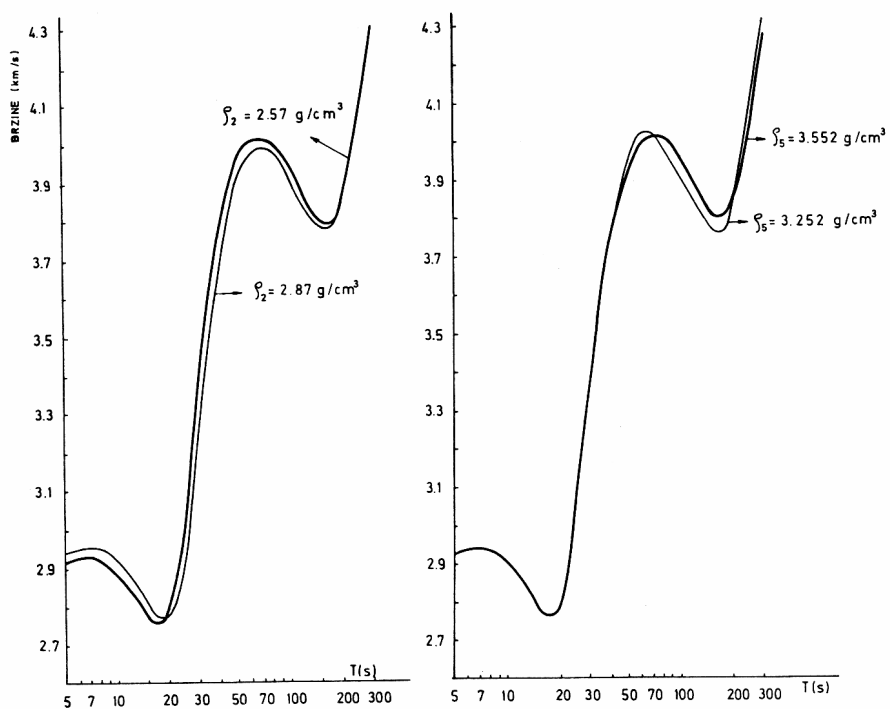
Figure 4. Partial derivatives of Rayleigh waves group velocity with respect to layer thicknesses (PEM). U and d are expressed in km/s and km respectively.

Usporedba slika 5 do 10 sa slikama 2, 3 i 4 pokazuje valjanost izračunatih parcijalnih derivacija. Vidi se da se može predvidjeti gdje će se modificirana krivulja disperzije grupne brzine sjeći s polaznom (nul-točka krivulje derivacija), za koji period će promjena parametra najviše djelovati, iznos promjene i dr.



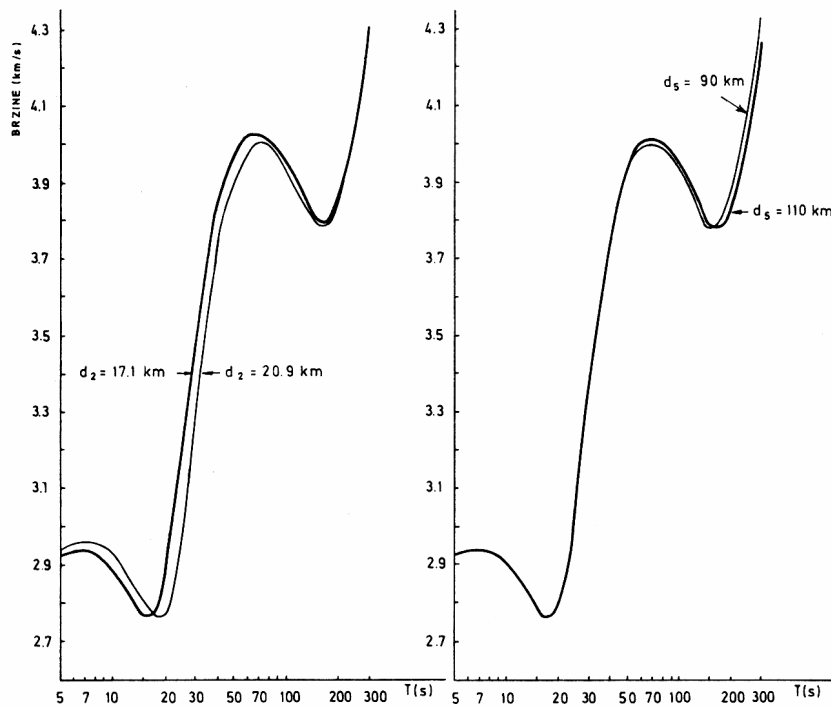
Slika 5. i 6. Krivulje grupne brzine Rayleighovih valova za promijenjeni parametar β u 2. odnosno 5. sloju modela PEM.

Figure 5 and 6. Group velocities of Rayleigh waves when shear velocity in second and fifth layer is varied.



Slika 7. i 8. Krivulje grupne brzine Rayleighevih valova za promijenjeni parametar ρ u 2. odnosno 5. sloju modela PEM.

Figure 7 and 8. Group velocities of Rayleigh waves when density in second and fifth layer is varied.



Slika 9. i 10. Krivulje grupne brzine Rayleighevih valova za promijenjeni parametar d u 2. odnosno 5. sloju modela PEM.

Figure 9. and 10. Group velocities of Rayleigh waves when thickness in second and fifth layer is varied.

5. Zaključak

Za računanje parcijalnih derivacija grupne brzine U Rayleighevih valova s obzirom na brzine β transverzalnih valova, gustoće ρ i debljine d slojeva u modelu PEM Dziejwonskog i dr. (1975.) upotrijebljena je metoda aproksimiranja diferencijala konačnim razlikama uz korištenje matrične metode za računanje faznih brzina. Račun je proveden za model koji se sastoji od 7 krutih, homogenih, izotropnih slojeva iznad krutog, homogenog, izotropnog poluprostora. Rezultati su korigirani za utjecaj sferičnosti da budu što realniji.

Parcijalne derivacije za sva tri mijenjana parametra određene su za periode od 5 do 300 sekundi čime je obuhvaćena kora i gornji plašt modela.

Analizom krivulja parcijalnih derivacija grupne brzine Rayleighevih valova može se zaključiti ovo:

(i) veći utjecaj na krivulju disperzije imaju brzine transverznog vala od gustoće, a utjecaj

promjene debljine slojeva je to veći što je sloj tanji,

(ii) za model PEM krivulje parcijalnih derivacija od U po β imaju maksimum za periode koji odgovaraju valnoj duljini od oko 3.45–3.80 h, osim za četvrti sloj, gdje taj broj iznosi 3.15 h (h je dubina do središta razmatranog sloja),

(iii) Mijenjanje debljine slojeva ima uglavnom za posljedicu pomicanje odgovarajućeg dijela krivulje grupe brzine prema većim ili manjim periodima, bez promjena iznosa najbližeg ekstrema.

6. Literatura

1. Bolt, B. A. and Dorman, J. (1961): Phase and group velocities of Rayleigh waves in a spherical, gravitating earth, *J. Geophys. Res.*, Vol. 66, pp. 2965–2981.
2. Brune, J. and J. Dorman (1963): Seismic waves and earth structure in the Canadian Shield, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 53, No. 1, pp. 167–210.
3. Doo Jung Jin and Eugene Herrin (1980): Surface wave studies of the Bering Sea and Alaska area, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 70, No. 6, pp. 2117–2144.
4. Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson (1981): Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Plan. Int.*, Vol. 25, pp. 297–356.
5. Harkrider, D. (1964): Surface waves in multilayered elastic media. I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 54, No. 2, pp. 627–679.
6. Haskell, N. A. (1953): The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 43, pp. 17–34.
7. Mišković, D. (1983): Brzine Rayleighovih valova u četverslojnom sredstvu, Geofizički zavod PMF-a, Zagreb (magistarski rad).
8. North, R. G., Dziewonski, A. M. (1976): A note on Rayleigh-wave flattening corrections, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 66, No. 5, pp. 1873–1879.
9. Rodi, W. L., Glover, P., Li, T. M. C. and Alexander, S. S. (1975): A fast, accurate method for computing group-velocity partial derivatives for Rayleigh and Love modes, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 65, No. 5, pp. 1105–1114.
10. Stacey, F. D. (1977): *Physics of the Earth*, John Wiley and Sons, New York, pp. 337–341.
11. Takeuchi, H., Dorman, J. and M. Saito (1964): Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to parameter changes within the Earth, *J. Geophys. Res.*, Vol. 69, pp. 3429–3441.

Prilog

Fazne brzine Rayleighovih valova računata su pomoću Thompson–Haskellovog matricnog postupka (Haskell, 1953., Harkrider, 1964.). Matrična jednadžba za disperziju Rayleighovih valova u n -slojnom krutom sredstvu može se prikazati na ovaj način:

$$F(c, \omega, \alpha_m, \beta_m, \rho_m, d_m) = NK - LM$$

gdje je

$$c = c(\omega, \alpha_m, \beta_m, \rho_m, d_m)$$

i

$$\begin{aligned}
K &= \gamma_n r_{\alpha n} A_{12} + (\gamma_{n-1}) A_{22} - r_{\alpha n} A_{32} / \rho_n c^2 + A_{42} / \rho_n c^2 \\
L &= \gamma_n r_{\alpha n} A_{11} + (\gamma_{n-1}) A_{21} - r_{\alpha n} A_{31} / \rho_n c^2 + A_{41} / \rho_n c^2 \\
M &= -(\gamma_{n-1}) A_{12} + \gamma_n r_{\beta n} A_{22} + A_{32} / \rho_n c^2 + r_{\beta n} A_{42} / \rho_n c^2 \\
N &= -(\gamma_{n-1}) A_{11} + \gamma_n r_{\beta n} A_{21} + A_{31} / \rho_n c^2 + r_{\beta n} A_{41} / \rho_n c^2
\end{aligned}$$

S ω je označena kutna frekvencija, c- fazna brzina, α i β - brzina longitudinalnih odnosno transverzalnih valova, ρ – gustoća i d – debljina sloja;

$$\gamma_m = 2 (\beta_m / c)^2$$

$$P_m = k r_{\alpha m} d_m$$

$$Q_m = k r_{\beta m} d_m$$

gdje je k valni broj;

$$r_{\alpha m} = \begin{cases} (c^2 / \alpha_m^2 - 1)^{1/2} & \text{za } c > \alpha_m \\ -i (1 - c^2 / \alpha_m^2)^{1/2} & \text{za } c < \alpha_m \end{cases}$$

$$r_{\beta m} = \begin{cases} (c^2 / \beta_m^2 - 1)^{1/2} & \text{za } c > \beta_m \\ -i (1 - c^2 / \beta_m^2)^{1/2} & \text{za } c < \beta_m \end{cases}$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$.

A predstavlja produkt Haskellovih matrica slojeva a_j ($j = 1, 2, \dots, m-1, m, \dots, n$):

$$A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1.$$

Indeksi m, n odnose se na m-ti kruti sloj i poluprostor (n).

Elementi matrice m-tog sloja su:

$$\begin{aligned}
(a_m)_{11} &= \gamma_m \cos P_m - (\gamma_m - 1) \cos Q_m \\
(a_m)_{12} &= i [(\gamma_m - 1) r_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + \gamma_m r_{\beta m} \sin Q_m] \\
(a_m)_{13} &= -(\rho_m c^2)^{-1} (\cos P_m - \cos Q_m) \\
(a_m)_{14} &= i (\rho_m c^2)^{-1} (r_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + r_{\beta m} \sin Q_m) \\
(a_m)_{21} &= -i [\gamma_m r_{\alpha m} \sin P_m + (\gamma_m - 1) r_{\beta m}^{-1} \sin Q_m] \\
(a_m)_{22} &= -(\gamma_m - 1) \cos P_m + \gamma_m \cos Q_m \\
(a_m)_{23} &= i (\rho_m c^2)^{-1} (r_{\alpha m} \sin P_m + r_{\beta m}^{-1} \sin Q_m) \\
(a_m)_{24} &= (a_m)_{13} \\
(a_m)_{31} &= \rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1) (\cos P_m - \cos Q_m) \\
(a_m)_{32} &= i \rho_m c^2 [(\gamma_m - 1)^2 r_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + \gamma_m^2 r_{\beta m} \sin Q_m] \\
(a_m)_{33} &= (a_m)_{22} \\
(a_m)_{34} &= (a_m)_{12} \\
(a_m)_{41} &= i \gamma_m c^2 [\gamma_m^2 r_{\alpha m} \sin P_m + (\gamma_m - 1)^2 r_{\beta m}^{-1} \sin Q_m] \\
(a_m)_{42} &= (a_m)_{31} \\
(a_m)_{43} &= (a_m)_{21} \\
(a_m)_{44} &= (a_m)_{11}
\end{aligned}$$