

GEOFIZIKA	Vol. 1	1984
-----------	--------	------

Izvorni znanstveni rad

Određivanje osnovnih parametara potresa zamjenom grafičkog postupka K. Wadatija analitičkim (četiri postaje)

Ivo Allegretti, Dragutin Skoko i Mladen Živčić
Geofizički zavod, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Primljeno 16. prosinca 1983.

UDK 550.341

Grafički postupak određivanja položaja žarišta potresa na osnovi podataka četiri seizmološke postaje, temeljen na Apolonijevom teoremu, kako ga je godine 1928. iznio japanski seizmolog K. Wadati, detaljno je analiziran i diskutiran. Preuređenjem početnih jednažbi rasprostiranja longitudinalnih i transverzalnih valova potresa te njihovim rješavanjem u fiksnom kartezijskom koordinatnom sustavu dobiven je analitički oblik opisane metode. Rješavanjem sustava od četiri jednažbe s četiri nepoznanice dolazi se do jednoznačnog rješenja za koordinate x , y , i z žarišta potresa i vrijednosti konstante $c = V_p V_s / (V_p - V_s)$. Opisani postupak nije primijenjiv u slučaju kad sve četiri postaje leže na jednom pravcu pošto determinanta sustava jednažbi rasprostiranja, zbog linearne ovisnosti koordinata postaja, iščezava. Također je opisan i grafički i njemu pridružen analitički postupak određivanja vremena nastanka potresa u žarištu.

Earthquake hypocentre determination by analytical
presentation of the Wadati's graphical method
(four seismological stations)

In the series of papers about the shallow and deep earthquakes Japanese seismologist K. Wadati presented a graphical method for the earthquake hypocentre determination. Due to its simplicity, it soon became well known as one of the best methods for locating near earthquakes. In the first part of this paper (Paragraphs 1., 2., 3.) all the details of Wadati's graphical method are presented. In Paragraph 4. original Wadati's procedure is presented in the analytical form. The solution of the equations (Eqs. 1.-4) of the seismic waves propagation is sought in the fixed rectangular coordinates. After the necessary transformations the equations (15) are obtained. This equation is linear in four unknowns: x_0 , y_0 , R_0^2 and c^2 . To solve the system it is necessary to form the equations for four seismological stations. The system (16) combined with the equation (17) completely defines the position of the hypocentre and the value of the constant c . In Appendix A a method of coordinate transformations is presented according to C. F. Richter (1958). It is somewhat simplified due to the linearity of coefficients A^c and B in the latitudes of Yugoslavia.

To complete the analysis of the data of an earthquake, in Paragraph 5. the graphical and the analytical method of the hypocentral time determination are presented. The graphical method is presented by the well known Wadati's diagram (Wadati, 1933) (Fig. 8. as example) while the analytical method consists in the straight line fitting to the observational data by the least squares method (Eq. 25., 28. - 30.).

The described method for the hypocentre determination cannot be applied when all four seismological stations lie on the straight line. This restriction is discussed in Appendix C where it is shown that in the case of linearity between the station coordinates the corresponding determinant (3.C) is vanishing.

In Paragraph 6. an example is presented. The hypocentre of the earthquake of 05. 02. 1969. at 04h 25m GMT is determined applying both graphical (Fig. 3.) and the analytical procedure. Some difficulties that may arise in the graphical procedure are also discussed, in particular the case when the ratio m_{ik} (Eq. (5)) approaches unity.

It is shown that the analytical method supersedes the graphical one in the precision of the results obtained, convenience of the procedure and the speed of its application, especially when an electronic computer is available.

1. Uvod

Određivanje položaja žarišta potresa u većini je mikroseizmičkih metoda vezano uz mjerenje nastupnih vremena pojedinih valova potresa i njihovih faza. Poznato je da i danas često u praksi postoje poteškoće u određivanju točnog vremena na seizmološkim postajama pa je japanski seizmolog K. Wadati smatrao da bi se najtočnije rezultate moglo dobivati mjerenjem razlika nastupnih vremena pojedinih valova potresa (Wadati, 1928). Položaj žarišta tražio je kao prostorno rješenje jednadžbe rasprostiranja valova potresa putem geometrijske konstrukcije. Njeno vremensko rješenje, tj. vrijeme nastanka potresa u žarištu određivao je također grafički (iz PS dijagrama) kao nultočku određene empirijske krivulje (Wadati, 1933).

U ovom radu izloženo je analogno analitičko prostorno rješenje jednadžbe rasprostiranja valova potresa, a njeno analitičko vremensko rješenje ostvareno je primjenom metode najmanje sume kvadrata odstupanja.

2. Osnove Wadatijeve metode

Prigodom postavljanja problema K. Wadati je uočio da se postupak njegovog rješavanja može pojednostavniti, zadržavajući dovoljnu točnost, primjenom nekih pretpostavaka o fizičkim svojstvima žarišta potresa i sredstva kroz koje se valovi potresa rasprostiru, kao i o geometrijskom razmještaju seizmoloških postaja. Žarište je definirao kao točkasti izvor longitudinalnih i transverzalnih valova potresa. Između žarišta i seizmoloških postaja sredstvo kroz koje se ovi valovi rasprostiru mora imati takova elastička svojstva da brzine longitudinalnih i transverzalnih valova budu u njemu konstantne.

Za geometrijski razmještaj postaja pretpostavlja da su sve smještene u istoj horizontalnoj ravnini uz uvjet da ne leže na jednom pravcu. I uz te pretpostavke zadovoljavajući se rezultati postižu tek ako su epicentralne udaljenosti postaja istog reda veličine kao i dubina žarišta potresa ili manje.

Uz navedene pretpostavke o žarištu potresa i sredstvu, rasprostiranje valova potresa izraženo je jednadžbom

$$R = V(t - t_0), \quad (1)$$

pri čemu je s R označen put koji val prijeđe brzinom V za vrijeme $t - t_0$, gdje je t_0 vrijeme nastanka potresa u žarištu.

3. Grafičko rješavanje jednadžba rasprostiranja

3.1. Jednadžbe rasprostiranja valova potresa i Apolonijeve sfere

Na svakoj od seizmoloških postaja registrira se vrijeme t_p dolaska longitudinalnog i vrijeme t_s dolaska transverzalnog vala potresa. Tako svakoj od postaja možemo pridružiti dvije jednadžbe rasprostiranja valova potresa:

za longitudinalne valove što se rasprostiru brzinom V_p :

$$R = V_p(t_p - t_0), \quad (2)$$

za transversalne valove što se rasprostiru brzinom V_s :

$$R = V_s (t_s - t_o). \quad (3)$$

Pri tomu će put R biti upravo jednak udaljenosti od žarišta do seizmološke postaje. Eliminacijom vremena t_o nastanka potresa u žarištu iz ovih se dviju jednadžba dobiva ovisnost udaljenosti R o vremenskoj razlici $t_s - t_p$ koja ne ovisi o apsolutnom mjerenju vremena:

$$R = \frac{V_p \cdot V_s}{V_p - V_s} (t_s - t_p) \quad (4)$$

Veličina $\frac{V_p \cdot V_s}{V_p - V_s}$ je prema pretpostavci konstantna dok se R , t_p i t_s mijenjaju od postaje do postaje. Označimo li indeksom „i” veličine pridjeljene i-toj postaji, a indeksom „k” k-toj postaji, omjer m_{ik} udaljenosti tih postaja od žarišta bit će jednak omjeru razlike nastupnih vremena transversalnih i longitudinalnih valova, izmjernih na tim postajama:

$$\frac{R_i}{R_k} = \frac{t_{si} - t_{pi}}{t_{sk} - t_{pk}} = m_{ik} \quad (5)$$

Geometrijsko značenje ove jednadžbe dade se izreći Apolonijevim teoremom: geometrijsko mjesto točaka za koje su udaljenosti R_i i R_k od dviju fiksnih točaka u konstantnom omjeru m_{ik} , jest kuglina ploha sa središtem na pravcu koji prolazi tim dvjema točkama (Imamura, 1937). Svaki par postaja formira jednu takovu kuglinu plohu. Presjecište dviju takovih kuglinih ploha je, općenito, kružnica; presjecište ove kružnice s trećom kuglinom plohom, uz uvjet da sve fiksne točke ne leže na pravcu, određuje dvije točke u prostoru postavljene simetrično obzirom na ravninu što prolazi središtima tih triju kuglinih ploha, dakle i fiksnim točkama. Fizički smisao imat će, naravno, samo sjecište ispod te ravnine, jer žarište potresa može opstojati samo u Zemlji, a ne i iznad njene površine. Iz opisanog postupka vidljivo je da tri Apolonijeve sfere u potpunosti definiraju položaj žarišta potresa, a da je za njihovu konstrukciju nužno raspolagati podacima od barem četiri postaje.

3.2. Grafičko rješenje jednadžba rasprostiranja valova potresa kao presjecište Apolonijevih sfera

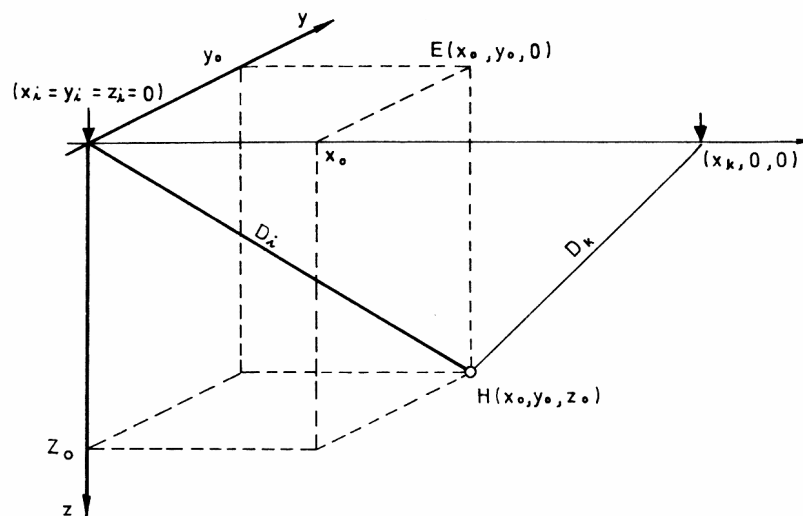
Postavljene odnose u prostoru K . Wadati je sveo na pripadne odnose u ravnini, što mu je omogućilo određivanje položaja epicentra i dubine žarišta potresa grafičkom, geometrijskom konstrukcijom. Umjesto kuglinih ploha u prostoru, konstruiraju se kružnice koje su presjeci Apolonijevih sfera i horizontalne ravnine gdje su, po pretpostavci, smještene seizmološke postaje. Koordinate središta i radijusi kružnica izračunaju se iz jednadžba oblika (5) (Allegretti, 1980; Milošević, 1972).

Da bi se to izvelo, čitav će se problem nadalje tretirati u pravokutnim kartezijskim koordinatnim sustavima, ishodišta kojih se fiksiraju u jednu od seizmoloških postaja. Apolonijeve sfere, odnosno kružnice kao presjeci s horizontalnom ravninom, tvorit će se tako da jedna postaja iz para bude uvijek ona što leži u ishodištu koordinatnih sustava, a druga će se sukcesivno mijenjati. Os x koordinatnog sustava postavlja se tako da prolazi obim postajama pojedinog para, a od para do para zakretat će se oko osi z

koja ostaje stalno usmjerena vertikalno prema dolje. Postavi li se ishodište koordinatnog sustava u i-tu postaju ($x_i = y_i = z_i = 0$) i os x usmjeri kroz k-tu postaju ($x_k, y_k = z_k = 0$) jednačba (5) može se napisati ovako:

$$m_k = \frac{\sqrt{x_o^2 - y_o^2 - z_o^2}}{\sqrt{(x_k - x_o)^2 + y_o^2 + z_o^2}} \quad (6)$$

gdje je indeks „i” ispušten pošto će za sve parove postaja ishodište biti u i-toj postaji. Indeks „o” odnosi se na koordinate žarišta (sl. 1.).



Slika 1. Pravokutni koordinatni sustav za par postaja (i,k). E označuje epicentar, a H žarište potresa.

Figure 1. Rectangular coordinate system for seismological stations pair (i,k). E is epicenter and H is focus of the earthquake.

Ovaj izraz zatim kvadrira i nakon množenja s nazivnikom dobiva se:

$$m_k^2 x_k^2 - 2 m_k^2 x_k x_o + m_k^2 x_o^2 + m_k^2 (y_o^2 - z_o^2) = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2.$$

Dijeljenjem ove jednačbe s $(1 - m_k^2)$ i sređivanjem, dobije se jednačba:

$$\left(x_o + x_k \frac{m_k^2}{1 - m_k^2}\right)^2 + y_o^2 + z_o^2 = x_k^2 \left(\frac{m_k}{1 - m_k^2}\right)^2 \quad (7)$$

koja za k-tu postaju opisuje kuglinu plohu. Koordinate središta ove kugline plohe određene su izrazima:

$$x_{s,k} = -x_k \frac{m_k^2}{1 - m_k^2}, \quad y_{s,k} = 0, \quad z_{s,k} = 0 \quad (8)$$

dok je polumjer kugline plohe dan jednadžbom:

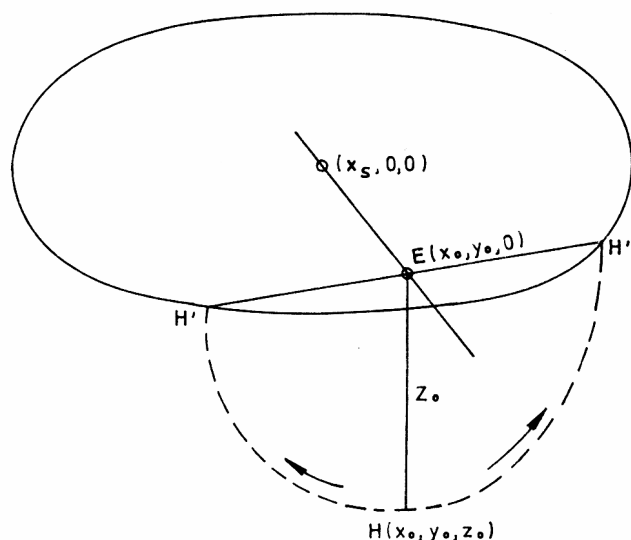
$$r_k = x_k \frac{m_k}{1 - m_k^2} \quad \text{za } m_k < 1,$$

odnosno

$$r_k = -x_k \frac{m_k}{1 - m_k^2} \quad \text{za } m_k > 1. \quad (9)$$

Središte Apolonijeve sfere nalazi se na osi x pa će kružnica definirana kao njeno presjecište s ravninom $z = 0$ imati radijus jednak radijusu sfere. Istim postupkom, nakon zakreta koordinatnog sustava, dobiju se koordinate ishodišta i polumjeri kružnica za svaki par (i, k) ($i = 1, k = 2, 3, 4$) postaja. Tetive izvučene kroz međusobna presjecišta tako dobivenih triju kružnica sijeku se u jednoj točki čiji položaj pridružujemo epicentru potresa kao ortogonalnoj projekciji žarišta na površinu Zemlje.

Dubina žarišta potresa predstavljena je duljinom polovice tetive što prolazi epicentrom okomito na pravac povučen kroz epicentar i središte pripadne kružnice (sl. 2.). Identičan se rezultat dobiva i izborom neke druge postaje kao ishodišta koordinatnih sustava.



Slika 2. Rotacijom dužine $E(x_0, y_0, 0) H(x_0, y_0, z_0)$ koja je prikaz dubine žarišta potresa, oko pravca koji prolazi točkama $(x_s, 0, 0)$ i $E(x_0, y_0, 0)$ dobiva se pola tetive EH' (EH'') čija je duljina jednaka dubini z_0 žarišta a nalazi se u horizontalnoj ravnini.

Figure 2. By rotating the length $E(x_0, y_0, 0) H(x_0, y_0, z_0)$ which is equal to the focal depth, about the line through the points $(x_s, 0, 0)$ and $E(x_0, y_0, 0)$ the half of cord EH' (EH'') is obtained. Its length is equal to the focal depth z_0 and is situated in horizontal plane.

Ako se raspolože podacima od n postaja, gdje je $n > 4$, može se naći toliko jednakopravnih položaja žarišta potresa koliko četvorki od n postaja bude moguće izabrati. Tako dobiveni položaji žarišta će se općenito, međusobno razlikovati u prostoru i, uz jednaku točnost očitavanja nastupnih vremena, njihova međusobna udaljenost bit će to manja što su uvjeti postavljani na izvor, sredstvo i položaj postaja bolje zadovoljeni.

4. Analitičko rješavanje jednadžba rasprostiranja

Nadalje, napustit će se područje geometrijskih konstrukcija i potražiti rješenje problema u analitičkom obliku (Allegratti, 1980). U tu se svrhu uvodi fiksni ortogonalni kartezijski sustav, kojega je najpraktičnije položiti tako da mu os apscisa bude u smjeru istoka, os ordinata u smjeru sjevera, a os aplikata u smjeru prema dolje. Ishodište tog sustava neka bude postavljeno u bilo kojoj točki na površini Zemlje. Pošto se koordinate postaja i žarišta potresa obično izražavaju u geografskim koordinatama, jedan od načina transformacije iz geografskog u kartezijski sustav i obratno, prikazan je u dodatku A.

Žarišna udaljenost R_k k -te postaje dana je u kartezijskom sustavu izrazom:

$$R_k = \sqrt{(x_k - x_o)^2 + (y_k - y_o)^2 + z_o^2} \quad (10)$$

gdje koordinate s indeksom „o” pripadaju žarištu potresa, a one s indeksom „k” k -toj postaji. Valja naglasiti da se koordinate x_k u fiksnom koordinatnom sustavu razlikuju od onih u sustavima iz poglavlja 3.

Uvedu li se oznake:

$$c = \frac{V_p \cdot V_s}{V_p - V_s} \quad T_{PS} = t_s - t_p,$$

to se za k -tu postaju jednadžba (4) može pisati u obliku:

$$R_k = c T_{PS,k}. \quad (11)$$

Lako je vidjeti da konstanta c ima dimenziju brzine pa čitava jednadžba izražava rasprostiranje fiktivnog vala S-P, put kojeg je za vrijeme $T_{PS,k} = t_{sk} - t_{pk}$ jednak putu longitudinalnog vala potresa za vrijeme $T_{pk} = t_{pk} - t_o$, odnosno transverzalnog vala potresa za vrijeme $T_{sk} = t_{sk} - t_o$.

Uvrsti li se izraz (10) u jednadžbu (11) rasprostiranja fiktivnog vala S-P dobiva se:

$$\sqrt{(x_k - x_o)^2 + (y_k - y_o)^2 + z_o^2} = c T_{PS,k}. \quad (12)$$

Da se izbjegne iracionalnost ova će se jednadžba kvadrirati i raspisat će se preostali kvadrati razlika:

$$x_k^2 + y_k^2 + x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 2x_k x_o - 2y_k y_o = c^2 T_{PS,k}^2. \quad (13)$$

Jednadžba (13) sadrži četiri nepoznanice: koordinate x_o , y_o , i z_o žarišta i konstantu c , a uvođenjem oznaka

$$d_k^2 = x_k^2 + y_k^2 \quad (14.a)$$

$$R_o^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 \quad (14.b)$$

postaje linearna u nepoznicama x_o , y_o , R_o^2 i c^2 :

$$d_k^2 + R_o^2 - 2x_k x_o - 2y_k y_o = c^2 T_{PS,k}^2 \quad (15)$$

gdje su d_k^2 i R_o^2 kvadrati udaljenosti postaje, odnosno žarišta od ishodišta koordinatnog sustava. Time je daljnji postupak rješavanja daleko olakšan.

Nepoznanice x_o , y_o , R_o^2 i c^2 moguće je jednoznačno odrediti ako se raspolaze s četiri jednadžbe oblika (15), tj. ako se raspolaze podacima od četiri seizmološke postaje. To implicira postavljanje sustava od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice, koji glasi:

$$\begin{aligned} R_o^2 - (2x_1) x_o - (2y_1) y_o - T_{PS,1} c^2 &= -d_1^2 \\ R_o^2 - (2x_2) x_o - (2y_2) y_o - T_{PS,2} c^2 &= -d_2^2 \\ R_o^2 - (2x_3) x_o - (2y_3) y_o - T_{PS,3} c^2 &= -d_3^2 \\ R_o^2 - (2x_4) x_o - (2y_4) y_o - T_{PS,4} c^2 &= -d_4^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Rješenje, ako opstoji, može se dobiti bilo kojom od metoda za rješavanje sustava od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice (vidi dodatak B).

Dubina žarišta određuje se iz izraza (14.b):

$$z_o = \pm \sqrt{R_o^2 - x_o^2 - y_o^2} \quad (17)$$

pri čemu zbog orijentacije osi aplikata i uvjeta da se žarište potresa može nalaziti samo u Zemlji ili na njoj površini, izabiremo rješenje $z_o \geq 0$.

5. Određivanje vremena nastanka potresa u žarištu

U prethodnim su poglavljima prostorna rješenja jednadžba rasprostiranja valova potresa dobivena uz eliminaciju vremena t_o nastanka potresa u žarištu. Ako se iz jednadžba (2) i (3) rasprostiranja valova potresa eliminiraju prostorni članovi (udaljenosti R postaje od žarišta) moguće je kao vremensko rješenje dobiti vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu. Pri tomu se, za razliku od prostornog rješenja, zahtijeva poznavanje apsolutnog vremena t_p dolaska longitudinalnog i vremena t_s dolaska transverzalnog vala na seizmološku postaju. Eliminacijom veličine R dobiva se izraz:

$$\frac{t_s - t_o}{t_p - t_o} = \frac{V_p}{V_s} \quad (18)$$

K. Wadati je u svom radu o vremenima putovanja valova potresa (Wadati, 1933) pošao od pretpostavke da je u ograničenom području Zemlje, tj. unutar promatrane mreže seizmografa, gdje se nalazi i epicentar potresa, omjer brzina longitudinalnih i transverzalnih valova potresa konstantan:

$$\frac{V_p}{V_s} = K. \quad (19)$$

To ima za posljedicu da su staze longitudinalnih i transverzalnih valova od žarišta do seizmološke postaje identične. Tada će za vremena $T_p = t_p - t_o$ i $T_s = t_s - t_o$ putovanja prostornih valova potresa vrijediti jednakosti:

$$\frac{T_s}{T_p} = \frac{\frac{R}{V_s}}{\frac{R}{V_p}} = \frac{V_p}{V_s} = K \quad (20)$$

što je upravo jednako jednadžbi (18) dobivenoj eliminacijom prostornog člana u jednadžbama rasprostiranja.

Vidljivo je da se množenjem jednadžbe (18) s $(t_p - t_o)$, te oduzimanjem t_o lijevoj i desnoj strani tako dobivene jednadžbe, razlika nastupnih vremena transversalnog i longitudinalnog vala može izraziti kao:

$$t_s - t_p = \left(\frac{V_p}{V_s} - 1 \right) t_p - \left(\frac{V_p}{V_s} - 1 \right) t_o. \quad (21)$$

Vrijeme $T_{PS} = t_s - t_p$ izraženo jednadžbom (21) linearna je funkcija nastupnog vremena t_p longitudinalnog vala onda i samo onda ako je omjer $K = V_p/V_s$ brzina u prostoru između žarišta i postaja konstantan. Ta pretpostavka, za razliku od pretpostavaka iznesenih prigodom određivanja prostornih koordinata žarišta potresa, ne zahtijeva konstantnost brzina longitudinalnog i transversalnog vala već samo konstantnost njihovog omjera.¹⁾

Vremena t_p i T_{PS} smatraju se poznatima (očitanja su sa seizmograma), pa su nepoznane u ovoj jednadžbi konstanta K i vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu. Da bi se odredile njihove vrijednosti nužno je raspolagati podacima od barem dvije postaje. Wadati je te vrijednosti određivao grafički tvoreći tzv. PS dijagram (kasnije nazvan i Wadatijevim dijagramom) u kojem je na os apscisa nanosio vremena t_p pojedinih postaja, a na os ordinata pripadna vremena T_{PS} . Spajanjem tako određenih točaka, dobiva se linija koju je Wadati nazvao PS linija. Naravno, što je vrijednost omjera $K = V_p/V_s$ u Zemljinoj kori bliže konstanti, PS linija će se to bolje moći aproksimirati pravcem. Ako, na primjer, vrijednost omjera K raste s dubinom PS linija će biti konkavna odozgo. Vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu određeno je nultočkom PS linije, odnosno njenim sjecištem s osi apscisa (tj. s vrijednosti t_p za $T_{PS} = 0$) koje se dobiva ekstrapolacijom linije.

U praksi se gotovo redovito dobivaju podaci koji u PS dijagramu ne leže ni na kakvoj pravilnoj liniji, već su oko nje slučajno rasuti. Prigodom grafičkog postupka za određivanje vremena t_o nastanka potresa u žarištu, od oka se izvlači linija koja najbolje opisuje skup empiričkih podataka.

Da bi se izbjegle pogreške vizuelne procjene i pogreške samog risanja, pristupit će se analitičkom određivanju linije koja najbolje opisuje empirijske podatke u duhu metode najmanje sume kvadrata odstupanja (Marković, 1965; Wellish, 1909).

Ako se pretpostavi da je omjer brzina $K = V_p/V_s$ konstantan u području u kojem se nalaze seizmološke postaje i žarište potresa, za svaku će od $k = 1, \dots, N$ seizmoloških postaja vrijediti

$$t_s - t_p + (K - 1) t_o - (K - 1) t_p = 0. \quad (22)$$

¹ Također dobar pristup za jednadžbu (21) bio bi razmatranje odnosa vremena putovanja fiktivnog vala S-P i longitudinalnog vala P. Val S-P sadržavao bi sve odlike rasprostiranja vala potresa, jedino ne bi posjedovao fizičku opstojnost (Wadati, 1928). Tako bi se mogla postaviti relacija:

$$\frac{T_{PS}}{T_p} = \frac{V_p}{c},$$

gdje je:

$$c = \frac{V_p V_s}{V_p - V_s}$$

Iz ovih odnosa lako je dobiti jednakost:

$$\frac{T_{PS}}{T_p} = K - 1$$

Ukoliko je broj N postaja veći od dva, zbog odstupanja realnog modela Zemlje od pretpostavljenog, kao i zbog pogrešaka mjerenja, jednadžba (22), općenito, neće moći biti istovremeno zadovoljena za sve postaje. Za neke vrijednosti omjera K i vremena t_o vrijedit će za k -tu postaju:

$$t_{s,k} - t_{p,k} + (K - 1) t_o - (K - 1) t_p = v_k \quad (23)$$

gdje su v_k odstupanja mjerenih vrijednosti razlika $t_{s,k} - t_{p,k}$ od onih računatih prema jednadžbi (21).

Vrijednost omjera K i vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu odredit će se uz uvjet da zbroj kvadrata v_k^2 odstupanja v_k bude minimalan. U tu će se svrhu jednadžba (23) kvadrirati te, tako dobivene jednadžbe zbrojiti po svim postajama $k = 1 \dots N$. Uz Gaussove

oznake za sume ($[ab] = \sum_{i=1}^N a_i b_i$) te oznake $T_{PS} = t_s - t_p$ i $L = K - 1$, dobivena jednadžba izgleda ovako:

$$[T_{PS} T_{PS}] + NL^2 t_o^2 + L^2 [t_p t_p] + 2Lt_o [T_{PS}] - 2L[t_p T_{PS}] - 2L^2 t_o [T_{PS}] = [vv] \quad (24)$$

Zbroj $[vv]$ kvadrata odstupanja funkcija je veličina L i t_o i njen se minimum određuje izjednačavanjem prvih parcijalnih derivacija, po svim varijablama, s nulom (Marković, 1965; Wellish 1909);

$$\frac{\partial [vv]}{\partial L} = \frac{\partial [vv]}{\partial t_o} = 0. \quad (25)$$

Deriviranjem jednadžbe (24) dobiva se:

$$\frac{\partial [vv]}{\partial t_o} = 2NL^2 t_o + 2L [T_{PS}] - 2L^2 [t_p] \quad (26)$$

$$\frac{\partial [vv]}{\partial L} = 2NL t_o^2 + 2L [t_p t_p] + 2 t_o [T_{PS}] - 2 [t_p T_{PS}] - 4L t_o [t_p] \quad (27)$$

Izjednačenjem jednadžbi (26) i (27) s nulom dobiva se sustav od dvije jednadžbe s nepoznicama L i t_o :

$$NL^2 t_o + L [T_{PS}] - L^2 [t_p] = 0 \quad (28)$$

$$NL t_o^2 + L [t_p t_p] - t_o^2 [T_{PS}] - [t_p T_{PS}] - 2L t_o [t_p] = 0 \quad (29)$$

Iz jednadžbe (28) nakon dijeljenja s L dobiva se za vrijeme nastanka potresa u žarištu:

$$t_o = \frac{L [t_p] - [T_{PS}]}{NL} \quad (30)$$

Uvrštenjem tako dobivenog izraza u jednadžbu (29) dobit će se za varijablu L :

$$L = \frac{N [t_p T_{PS}] - [t_p] [T_{PS}]}{N [t_p t_p] - [t_p] [t_p]} \quad (31)$$

Vidljivo je da je izraz (31) upravo jednak izrazu za računanje koeficijenta smjera pravca regresije skupa točaka (T_{PS} , t_p). Stoga zaključujemo da je određivanje omjera $K = V_p/V_s$ metodom najmanje sume kvadrata odstupanja, primjenom na jednadžbu (21), identično s pridjeljivanjem pravca regresije skupu točaka (T_{PS} , t_p) pri čemu je koeficijent smjera pravca jednak $L = K - 1$. Standardna devijacija tako određenog koeficijenta smjera dana je s:

$$\sigma_L = \frac{\sigma}{\sqrt{[t_p t_p] - \frac{[t_p][t_p]}{N}}} \quad (32)$$

gdje je:

$$\sigma_L = \frac{[vw]}{N-2} = \sqrt{\frac{1}{N-2}} \sqrt{[T_{PS} T_{PS}] - \frac{[T_{PS}][T_{PS}]}{N} - \frac{([t_p T_{PS}] - \frac{[t_p][T_{PS}]}{N})^2}{[t_p t_p] - \frac{[t_p][t_p]}{N}}} \quad (33)$$

Kako je $\partial K / \partial L = 1$ to je $\sigma_K = \sigma_L$.

Vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu dobiva se uvrštenjem ovako dobivene vrijednosti za omjer K u jednadžbu (30):

$$t_o = \frac{(K-1)[t_p] - [T_{PS}]}{N(K-1)} \quad (34)$$

Kako je $\partial t_o / \partial K = T_{PS} / (N(K-1)^2)$ to je standardna devijacija σ_{t_o} vremena nastanka potresa u žarištu:

$$\sigma_{t_o} = \frac{[T_{PS}]}{N(K-1)} \sigma_K \quad (35)$$

Do istih se rezultata može doći ako se u jednadžbi (21) uvedu oznake:

$$\begin{aligned} L &= K - 1 & i \\ M &= (K - 1) t_o = L t_o \end{aligned} \quad (36)$$

Time su razlike $t_s - t_p$ izražene kao linearna funkcija nastupnih vremena t_p :

$$t_s - t_p = L t_p - M \quad (37)$$

gdje je L koeficijent smjera pravca, a M odsječak na osi ordinata. Oni se određuju pridjeljivanjem pravca regresije skupu empirijskih točaka (T_{PS}, t_p) . Iz tako dobivenih veličina L i M lako je prema (36) izračunati vrijednost omjera $K = V_p / V_s$ i vrijeme t_o nastanka potresa u žarištu.

6. Primjer određivanja položaja žarišta potresa

Zbog potpunijeg prikaza navedenih postupaka za određivanje položaja žarišta potresa prema K. Wadatiju, i grafički i analitički postupak ilustrirat će se jednim primjerom. Mreža seizmoloških postaja postavljenih u okolici Skopja zabilježila je 05. veljače 1969. godine potres s epicentrom u blizini Skopja. Podaci o očitanim nastupnim vremenima longitudinalnog i transverzalnog vala, kao i geografske koordinate postaja dani su u tablici 1. (preuzeto iz Preliminary Seismological Bulletin, Seismological observatory Skopje, 1969).

Tablica 1. Geografske koordinate φ i λ seizmoloških postaja i nastupna vremena t_p longitudinalnog i t_s transverznog vala potresa.

Table 1. Geographical coordinates φ and λ of seismological stations and arrival times of longitudinal (t_p) and transversal (t_s) seismic waves.

Postaja	k	φ	λ	t_p	t_s
KATLANOVO (KAY)	4	41°53'45" N	21°42'06" E	04 ^h 25 ^m 24.3 ^s	26.5 ^s
SKOPJE (SKO)	2	41°58'19.5" N	21°26'22.5" E	24.4 ^s	26.7 ^s
LIPKOVO (LIP)	3	42°09'45" N	21°35'00" E	27.3 ^s	31.7 ^s
MATKA (MYG)	1	41°57'24" N	21°18'03" E	27.3 ^s	31.2 ^s

6.1. Grafički postupak

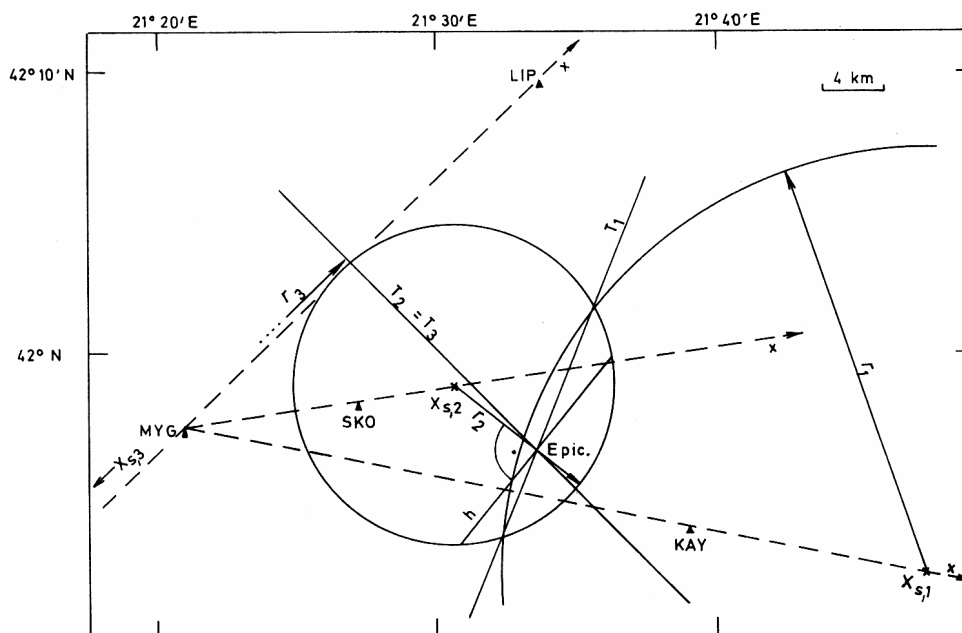
Grafičko rješenje tražit će se pomoću pravokutnih koordinatnih sustava, ishodište kojih je seizmološka postaja Matka (MYG). Udaljenosti postaja Skopje (SKO), Lipkovo (LIP) i Katlanovo (KAY) od postaje Matka (koordinate x_k u pravokutnim koordinatnim sustavima) mogu se odrediti mjerenjem na zemljopisnoj karti ili računski. Te udaljenosti ovdje su određene računski (zbog veće točnosti) te su, kao i parametri m_k , $x_{s,k}$ i r_k dane u tablici 2.

Tablica 2. Koordinate x_k i parametri m_k , $x_{s,k}$ i r_k određeni za pravokutne koordinatne sustave s ishodištem u postaji Matka (MYG).

Table 2. Coordinates x_k and parameters m_k , $x_{s,k}$ and r_k as determined for rectangular coordinate systems with the origin at seismological station Matka (MYG).

Postaja	x_k (km)	m_k	$x_{s,k}$ (km)	r_k (km)
SKO	11.629	1.696	17.831	-10.515
LIP	32.704	0.886	-119.861	135.228
KAY	33.928	1.773	49.764	-28.072

Nadalje, u kartu se ucrtaju pravci (osi x) kroz središnju postaju i svaku od postaja koja s njom tvori jednu Apolonijevu sferu. Na te pravce nanose se pripadna središta kružnica s koordinatama $x_{s,k}$ oko kojih se zatim opiše kružnica radijusa r_k . Kroz sjecišta ovih kružnica povuku se sekante (T_1 , T_2 , T_3) (slika 3), koje se sijeku u jednoj točki – epicentru potresa. Koordinate tog epicentra očitaju se s karte. Sada valja povući pravac kroz epicentar i bilo koje od središta kružnica. Pola duljine tetive koja u epicentru pod



Slika 3. Određivanje položaja epicentra i dubine žarišta potresa 05. veljače 1969. g. grafičkim postupkom prema K. Wadatiju.

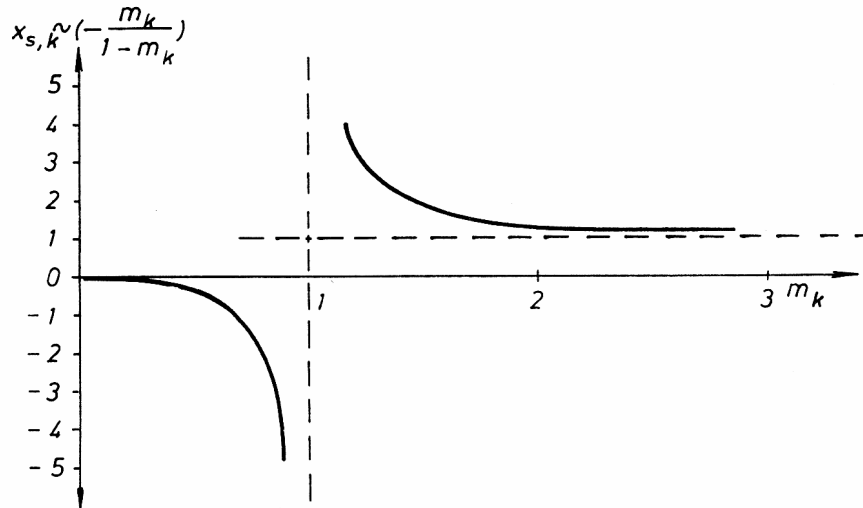
Figure 3. Epicenter and focal depth determination for earthquake of February 05, 1969, by the graphical method of K. Wadati.

pravim kutom siječe taj pravac daje dubinu žarišta potresa (slike 2. i 3). Koordinate žarišta očitane sa slike 3. su: $\varphi_E = 41.942^\circ\text{N}$, $\lambda_E = 21.578^\circ\text{E}$ i dubina $h = 7.8$ km.

Iz slike 3. ili tablice 2. vidi se da su vrijednosti $x_{s,k}$ i r_k za postaju Lipkovo za red veličine veće od vrijednosti za postaje Skopje i Katlanovo. To predstavlja poteškoću kod grafičkog rješavanja jer zahtijeva da kružnica koju formira par postaja Matka – Lipkovo ima nesrazmjerno velik radijus koji je teško točno ucrtati na kartu. Smanjenjem mjerila karte taj bi se radijus smanjio, ali tada bi radijusi preostale dvije kružnice bili premaleni za točno određivanje položaja epicentra i dubine žarišta potresa. Na slikama 4. i 5. prikazana je ovisnost koeficijenata kojima treba množiti međusobnu udaljenost x_k postaja da bi se dobile veličine $x_{s,k}$ i r_k , o vrijednosti omjera $m_k = T_{PS,1}/T_{PS,k}$. Za vrijednost omjera $m_k = 1$ te dvije funkcije imaju prekinutost. U načelu takvi se slučajevi nastoje izbjeći premještanjem ishodišta pravokutnih koordinatnih sustava u neku drugu postaju, tako da se omjeri m_k čim više razlikuju od jedinice. Kada je $m_k = 1$ kružnica koja je definirana tim dvjema postajama postaje pravac koji pod pravim kutom siječe njihovu spojnicu u polovištu. To se može dobiti i analitički, ako se promatra udaljenost s_k od ishodišta do točke na kojoj kružnica radijusa r_k sa središtem u $x_{s,k}$ siječe spojnicu postaja. Iz slika 6.a i 6.b vidljivo je da je ta udaljenost dana s

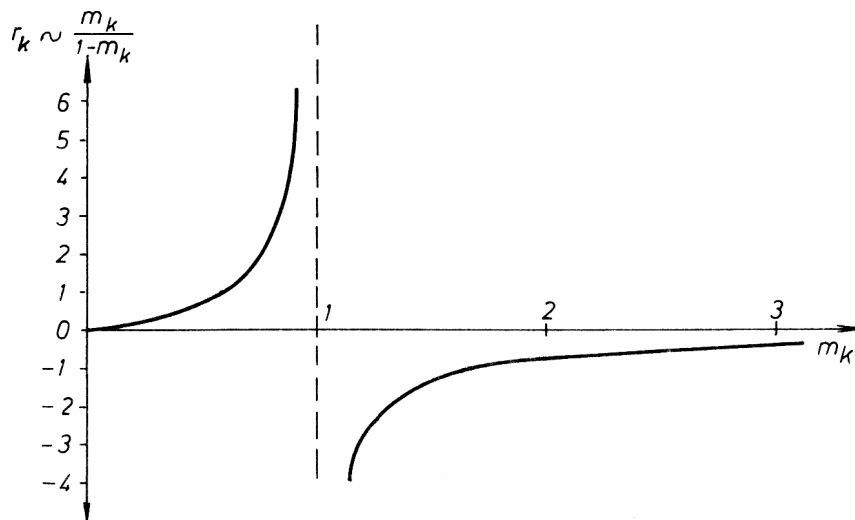
$$s_k = x_{s,k} + r_k \quad \text{za} \quad m_k < 1$$

odnosno s



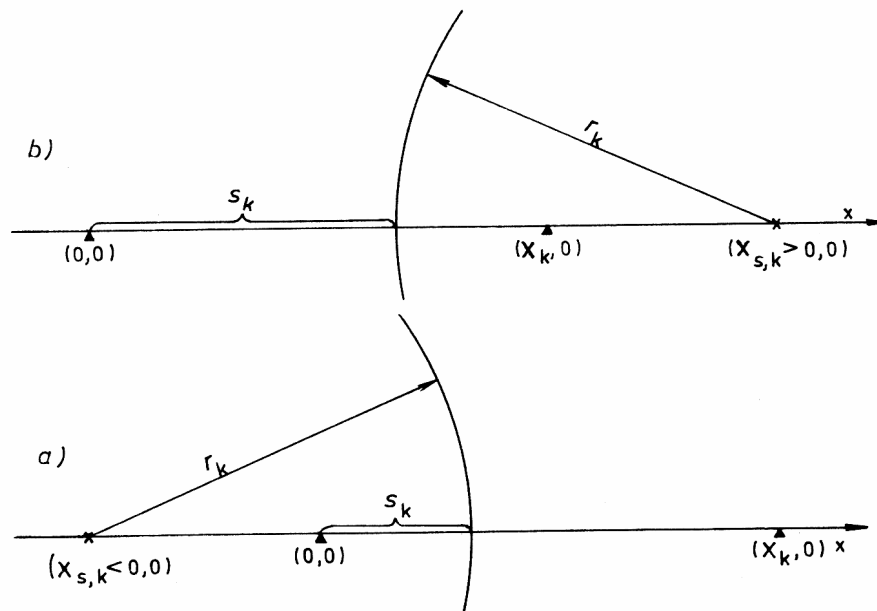
Slika 4. Ovisnost koordinate $x_{s,k}$ o omjeru m_k ($x_k = 1$).

Figure 4. Dependence of $x_{s,k}$ on the ratio m_k ($x_k = 1$).



Slika 5. Ovisnost radijusa r_k o omjeru m_k ($x_k = 1$).

Figure 5. Dependence of radius r_k on the ratio m_k ($x_k = 1$).



Slika 6. Udaljenosti s_k za slučaj kada je a) $m_k < 1$,
b) $m_k > 1$.

Figure 6. Distances s_k for the case: a) $m_k < 1$,
b) $m_k > 1$.

$$s_k = x_{s,k} - r_k \quad \text{za} \quad m_k > 1$$

Uvrštenjem izraza za $x_{s,k}$ (jedn. (8)) i r_k (jedn. (9)) slijedi:

$$s_k = -x_k \frac{m_k^2}{1 - m_k^2} + x_k \frac{m_k}{1 - m_k^2}$$

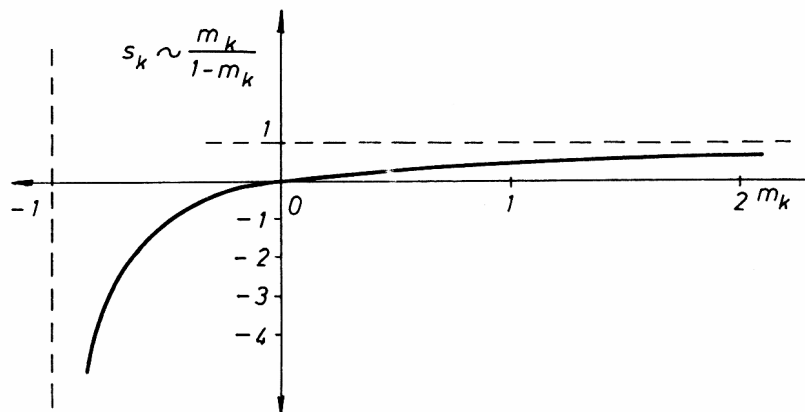
i za vrijednosti $m_k < 1$ i za $m_k > 1$. Sređivanjem se dobiva:

$$s_k = x_k \frac{m_k}{1 + m_k}$$

iz čega za $m_k = 1$ slijedi da je $s_k = x_k/2$, pa kružnica prolazi upravo polovištem spojnice dviju postaja (ovisnost udaljenosti s_k o omjeru m_k prikazana je na slici 7). Središte se kružnice u tom slučaju nalazi u beskonačnosti na pravcu kroz te dvije postaje, a i njen je radijus također beskonačno velik pa se luk kružnice pretvara u pravac okomit na spojnicu tih dviju postaja.

6.2. Analitički postupak

Za analitičko rješenje problema valja geografske koordinate postaja transformirati u pravokutne koordinate fiksnog koordinatnog sustava. Neka ishodište koordinatnog sustava bude u točki $\varphi_0 = 42^\circ\text{N}$ i $\lambda_0 = 21.5^\circ\text{E}$. Vrijednosti pravokutnih koordinata u



Slika 7. Ovisnost udaljenost s_k o omjeru m_k ($x_k = 1$).

Figure 7. Dependence of the distance s_k on the ratio m_k ($x_k = 1$).

Tablica 3. Vrijednosti pravokutnih koordinata seizmoloških postaja u fiksnom Kartezijском sustavu s ishodištem u $\varphi = 42^\circ N$ i $\lambda = 21.5^\circ E$, udaljenosti d_k seizmoloških postaja od ishodišta i vremena $T_{PS,k}$.

Table 3. Rectangular coordinates of seismological stations in fixed Cartesian coordinate system with the origin at $\varphi = 42^\circ N$, $\lambda = 21.5^\circ E$, distances d_k of seismological stations from the origin and the times $T_{PS,k}$.

Postaja	x_k (km)	y_k (km)	d_k (km)	$T_{PS,k}$ (s)
KAY	16.742	-11.570	20.351	2.2
SKO	- 5.005	- 3.101	5.888	2.3
LIP	6.877	18.050	19.316	4.4
MYG	-16.507	- 4.813	17.194	3.9

tako odabranom sustavu dobivene su primjenom jednadžba iz Dodatka A, a navedene su u tablici 3. Također su dane i vrijednosti $T_{PS} = t_s - t_p$ i udaljenosti postaja od ishodišta $d_k = x_k^2 + y_k^2$, koje su potrebne za rješavanje sustava jednadžba (16). Time se dobiva sustav jednadžba (vidi Dodatak B):

$$-2 \cdot 11.50 x_0 - 2 \cdot 1.71 y_0 + 9.92 c^2 = 260.98$$

$$-2 \cdot 23.38 x_0 - 2 \cdot 22.86 y_0 - 4.15 c^2 = -77.45$$

$$-2 \cdot 33.25 x_0 - 2 \cdot 6.76 y_0 + 10.37 c^2 = -118.51$$

Vrijednosti determinanata tog sustava su:

$$\begin{aligned} \det S &= -29420.80 \\ \det Sx_0 &= -177689.18 \\ \det Sy_0 &= 232313.69 \\ \det Sc^2 &= -1103237.84 \end{aligned}$$

pa su pravokutne koordinate epicentra:

$$\begin{aligned} x_0 &= 6.04 \text{ km,} \\ y_0 &= -7.90 \text{ km} \end{aligned}$$

i konstanta

$$c = 6.1 \text{ km s}^{-1}.$$

Za nepoznanicu R_0^2 dobiva se vrijednost

$$R_0^2 = 152.18 \text{ km}^2,$$

odakle je dubina žarišta potresa

$$h = 7.3 \text{ km.}$$

Postupkom opisanim u Dodatku A, za prijelaz iz pravokutnih koordinata u geografske, slijedi konačno:

$$\begin{aligned} \varphi_E &= 41.929^\circ \text{N,} \\ \lambda_E &= 21.573^\circ \text{E.} \end{aligned}$$

Razlike između položaja žarišta potresa određenih grafički i analitički nisu velike (u ovom slučaju oko 1.5 km). Točnost grafičkog rezultata, međutim, ovisi o rasporedu postaja, kao i o ulaznim vrijednostima T_{PS} , te će od slučaja do slučaja biti različita. Analitički, pak, pristup nema takovih nedostataka i primjenjiv je uvijek pod uvjetom da četiri postaje, podacima kojih se raspolože, ne leže na istom pravcu.

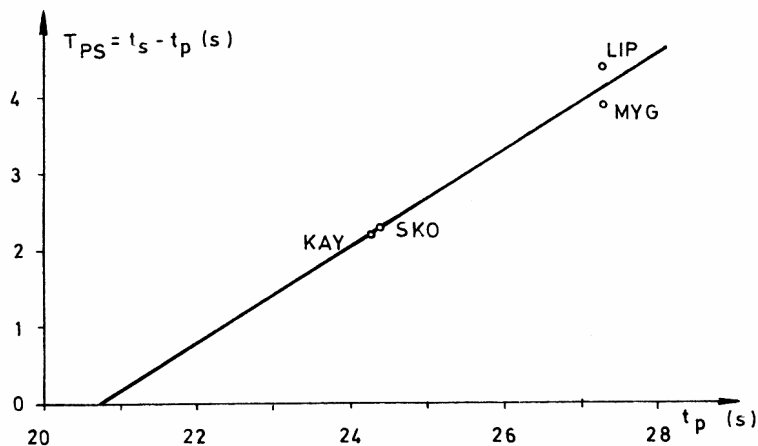
7. Primjer određivanja vremena nastanka potresa u žarištu

Određivanje vremena nastanka potresa ilustrirat će se primjenom grafičkog i analitičkog postupka na isti potres. Podaci o vremenima dolaska longitudinalnog i transverzalnog vala na seizmološke postaje prikazani su u tablici 1.

7.1. Grafički postupak

Da bi se grafički odredilo vrijeme nastanka potresa u žarištu nužno je narisati tzv. Wadatijev dijagram u koji se na os apscisa nanose nastupna vremena t_p longitudinalnog vala potresa, a na os ordinata pripadne razlike $T_{PS} = t_s - t_p$ u nastupnim vremenima transverzalnog i longitudinalnog vala (slika 8). Vrijeme nastanka potresa dano je presjecištem pravca povučenog tako da najbolje aproksimira položaj dobivenih točaka, s osi apscisa. U ovom je slučaju ta vrijednost oko 20.7 s, pa je vrijeme t_0 nastanka potresa u žarištu, određeno grafički:

$$t_0 = 04^h 25^m 20.7^s.$$



Slika 8. Grafičko određivanje vremena nastanka potresa u žarištu prema K. Wadati (Wadatijev dijagram) za potres 05. veljače godine 1969.

Figure 8. Graphical determination of origin time according to K. Wadati (Wadati's plot) for the earthquake of February 05, 1969.

7.2. Analitički postupak

Da bi se isti problem riješio analitički, odredit će se zbrojevi potrebni za jednažbe (30) i (31):

$$\begin{aligned} [t_p] &= 103.30 \\ [T_{PS}] &= 12.80 \\ [t_p \ t_p] &= 2676.43 \\ [T_{PS} \ T_{PS}] &= 44.70 \\ [t_p \ T_{PS}] &= 336.17 \end{aligned}$$

Odatle slijedi prema jednažbi (31):

$$L = 0.644 \ ,$$

te prema (34):

$$t_0 = 04^h \ 25^m \ 20.9^s.$$

Kako se raspolaže podacima više od dvije postaje moguće je (prema jedn. (32), (33) i (35)) odrediti i standardnu devijaciju tako dobivenog rezultata:

$$\sigma_{t_0} = 0.7s.$$

Vidljivo je da ni u određivanju vremena nastanka potresa u žarištu razlike u grafički i analitički dobivenim rezultatima nisu velike (u ovom slučaju 0.2s). Grafički je postupak, međutim, podložan slobodnoj procjeni pri povlačenju linije kroz skup točaka (t_p , T_{PS}), dok analitički postupak daje objektivno najbolji rezultat u duhu metode najmanje sume

kvadrata odstupanja. Pri tomu se analitičkim postupkom može izračunati i standardna devijacija kao kvantitativna procjena točnosti rezultata.

Za analitičko rješenje oba problema (određivanje prostornih koordinata žarišta i vremena nastanka potresa) učinjen je u Geofizičkom zavodu PMF-a u Zagrebu program za elektroničko računalo KOPA 1500. Koordinate svih postaja nalaze se pohranjene u memoriji računala te je, uz oznaku postaje, potrebno upisivati samo nastupna vremena longitudinalnih i transverzalnih valova potresa. Sam proces računanja traje manje od jedne sekunde.

8. Zaključak

Grafički postupak rješavanja jednadžba (1) rasprostiranja seizmičkih valova kako ga je još godine 1928. prikazao japanski seizmolog K. Wadati, zamijenjen je odgovarajućim analitičkim postupkom. Time se određivanje koordinata epicentra i dubine žarišta potresa svelo na rješavanje sustava (16) od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice. Na taj su način otklonjene pogreške samog grafičkog postupka (nepreciznost risanja, procjena presjecišta dvaju lukova kružnica i sl.) i izbjegnuti slučajevi u kojima je grafičko rješenje gotovo nemoguće ($m_k \approx 1$ & $m_k \neq 1$). Radi cjelovitosti analize podataka jednog potresa izložen je i postupak određivanja vremena nastanka potresa u žarištu. Zamjenom grafičkog postupka, odgovarajućim analitičkim postupkom, postigla se veća točnost dobivenih rezultata, a primjenom elektroničkih računala i brzina određivanja osnovnih parametara potresa neusporedivo je veća. To se osobito ističe pri analizi velikog broja naknadnih potresa zabilježenih na lokalnoj mreži od četiri seizmološke postaje.

Literatura

1. Allegretti, I. (1980), O jednom postupku lociranja žarišta, Diplomski rad, Geofizički zavod PMF-a, Zagreb
2. Bronštejn, I. N. i K. A. Semendjajev (1962), Matematički priručnik za inženjere i studente, prijevod s ruskog u redakciji D. Blanuše, Tehnička knjiga, Zagreb 1964.
3. Imamura, A. (1937), Theoretical and applied seismology, Maruzen & Co., Reprinted by Kajima institute publishing Co. Ltd. 1964.
4. Marković, Ž. (1965), Uvod u višu analizu, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb
5. Milošević, A. (1972), Neke karakteristike seizmiciteta skopske kotline, Diplomski rad, Geofizički zavod PMF-a, Zagreb
6. Richter, C. F. (1958), Elementary seismology, W. H. Freeman & Co., San Francisco
7. Surov, V. P. (1979), Algoritmi parametrizacije ožagov zemljotrasenij ispoljzenij v Uzbekistane, u: Katrenko, V. G. i I. B. Jakovleva (Eds): Sejsmologičeskie issledovanija v Uzbekistane, 125–135
8. Wadati, K. (1928), Shallow and deep earthquakes, Reprinted from the Geophysical magazine Vol. I, No. 4., 162–202
9. Wadati, K. (1933), On the travel time of earthquake waves (Part II), Geophysical magazine Vol. VII, No. 1., 101–111
10. Wellish, S. (1909), Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung, Erster Band (1909) und zweiter Band (1910), Keis. Kön. Hof-Buch-Druckerei und Hof-Verlags-Buchhandlung Carl Fromme, Wien und Leipzig

Dodatak A*Transformacije koordinatnih sustava*

Postupak za prijelaz iz geografskih koordinata u pravokutne i obratno preuzet je iz knjige C. F. Richtera „Elementary Seismology” (Appendix XII). Izložit će se navedeni postupak kao i njegova prilagodba za primjenu na elektroničkim računalima.

Prijelazom na pravokutni koordinatni sustav određeni dio Zemljine površine se aproksimira horizontalnom ravninom. Ta će aproksimacija biti to bolja što su udaljenosti koje ulaze u račun manje. Stoga se ishodište pravokutnog koordinatnog sustava valja izabrati dovoljno blizu, ili, još bolje, unutar mreže postaja.

Neka su φ_0 i λ_0 geografska širina i geografska dužina tako odabranog ishodišta pravokutnog koordinatnog sustava kojega je os x usmjerena prema istoku, a os y prema sjeveru, te φ_p i λ_p geografske, a x_p i y_p pravokutne koordinate proizvoljne točke P. C. F. Richter je za prijelaz iz jednog koordinatnog sustava u drugi postavio naredne relacije, koje za udaljenosti do 500 km daju pogrešku manju od 0.1 km:

$$\begin{aligned}x_p &= A(\varphi)(\lambda_p - \lambda_0) \\y_p &= B(\varphi)(\varphi_p - \varphi_0)\end{aligned}\tag{1.A}$$

Koeficijent $A(\varphi)$ je duljina luka jedne minute paralele na srednjoj geografskoj širini $0.5(\varphi_p + \varphi_0)$ ishodišta i točke P (izražena u kilometrima). Jednako je definiran i koeficijent $B(\varphi)$ kao duljina jedne minute luka meridijana sa srednjom geografskom širinom $0.5(\varphi_p + \varphi_0)$. Slijedi da se razlika geografskih koordinata u (1.A) izražava u lučnim minutama.

Vrijednost koeficijenata $A(\varphi)$ i $B(\varphi)$ ovisne su o geografskoj širini. Kako se koeficijent $A(\varphi)$ brzo mijenja s geografskom širinom to je lakše računati s veličinom $A^c(\varphi) = A(\varphi) \cos^{-1} \varphi$, promjene koje su bitno manje. Vrijednosti svih triju koeficijenata za svaki stupanj geografske širine dane su tablično u knjizi C. F. Richtera prema Smithsonian Geographical Tables, a odnose se na Clarkeov sferoid.

Za područje geografskih širina koje zahvaća Jugoslavija (40°N do 47°N) promjena vrijednosti koeficijenata $A^c(\varphi)$ i $B(\varphi)$ s geografskom širinom je približno linearna te se mogu izraziti funkcijski umjesto da se tablice pohranjuju u memoriju računala.

Jednadžbe interpolacije glase:

$$\begin{aligned}A^c(\varphi) &= A^c(40^\circ\text{N}) + \delta A^c \cdot (\varphi - 40^\circ), \\A(\varphi) &= (A^c(40^\circ\text{N}) + \delta A^c \cdot (\varphi - 40^\circ)) \cdot \cos \varphi \quad i \\B(\varphi) &= B(40^\circ\text{N}) + \delta B \cdot (\varphi - 40^\circ),\end{aligned}\tag{2.A}$$

gdje je

$$\begin{aligned}\delta A^c &= \frac{A^c(47^\circ\text{N}) - A^c(40^\circ\text{N})}{7^\circ} \quad i \\ \delta B &= \frac{B(47^\circ\text{N}) - B(40^\circ\text{N})}{7^\circ},\end{aligned}\tag{3.A}$$

a razlike geografskih širina u (2.A) su izražene u stupnjevima. U ovom slučaju su:

$$\begin{aligned}A^c(40^\circ) &= 1.857964 \text{ km/arc min}, \\A^c &= 0.000110 \text{ (km/arc min)/arc deg}, \\B(40^\circ) &= 1.850565 \text{ km/arc min}, \\B &= 0.000328 \text{ (km/arc min)/arc deg}\end{aligned}$$

pa su jednadžbe interpolacije za geografske širine od 40°N do 47°N :

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= (1.85764 + 0.00011 (\varphi - 40^\circ)) \cos \varphi \quad \text{km/arc min} \quad \text{i} \\ B(\varphi) &= 1.850565 + 0.000328 (\varphi - 40^\circ) \quad \text{km/arc min} \quad . \end{aligned} \quad (4.A)$$

Uvrštenjem u jednadžbe (1.A) i (2.A) dobiva se potpun izraz za prijelaz iz geografskog u pravokutni koordinatni sustav:

$$\begin{aligned} x_p &= [A^c(\varphi_o) + \delta A^c \cdot (\frac{\varphi_p - \varphi_o}{2})] \cdot (\lambda_p - \lambda_o) \cos \frac{\varphi_p + \varphi_o}{2} \quad \text{i} \\ y_p &= [B(\varphi_o) + \delta B \cdot (\frac{\varphi_p - \varphi_o}{2})] \cdot (\varphi_p - \varphi_o). \end{aligned} \quad (5.A)$$

Prijelaz iz pravokutnih koordinata u geografske potrebno je izvoditi iteracijski, jer geografska širina $\varphi = 0.5(\varphi_p + \varphi_o)$ za koju treba uzeti vrijednosti koeficijenta $A(\varphi)$ i $B(\varphi)$ nije poznata. Početnu vrijednost geografske širine točke P odredit će se kao:

$$\varphi_p^1 = \varphi_o + \frac{y_p}{B(\varphi_o) \cdot 60},$$

gdje je $B(\varphi_o) = B(40^\circ) + \delta B \cdot (\varphi_o - 40^\circ)$. U slijedećem koraku uzima se vrijednost koeficijenta $B(\varphi)$ na geografskoj širini $\varphi = 0.5(\varphi_p^1 + \varphi_o)$ i dobiva:

$$\varphi_p^2 = \varphi_o + \frac{y_p}{[B(\varphi_o) + \delta B \cdot (\frac{\varphi_p^1 - \varphi_o}{2})] \cdot 60}.$$

Postupak se ponavlja sve dok razlika $\varphi_p^k - \varphi_p^{k-1}$ ne postane po volji mala i ta se vrijednost pridružuje točki P.

Kako je sada vrijednost φ_p poznata, to se geografska dužina točke P može izračunati izravno iz:

$$\lambda_p = \lambda_o + \frac{x_p}{A^c(\frac{\varphi_p + \varphi_o}{2}) \cdot \cos(\frac{\varphi_p + \varphi_o}{2}) \cdot 60}.$$

Dodatak B

Rješavanje prostorne jednadžbe rasprostiranja

Prigodom određivanja prostornih koordinata žarišta potresa došlo se do sustava od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice koji je glasio:

$$\begin{aligned} R_0^2 - 2x_1x_0 - 2y_1y_0 - T_{PS,1}^2 c^2 &= -d_1^2 \\ R_0^2 - 2x_2x_0 - 2y_2y_0 - T_{PS,2}^2 c^2 &= -d_2^2 \\ R_0^2 - 2x_3x_0 - 2y_3y_0 - T_{PS,3}^2 c^2 &= -d_3^2 \\ R_0^2 - 2x_4x_0 - 2y_4y_0 - T_{PS,4}^2 c^2 &= -d_4^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Oduzme li se prva jednadžba od druge, treće i četvrte eliminiirat će se nepoznanica R_0^2 i dobiti sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned}
2(x_1 - x_2)x_0 - 2(y_1 - y_2)y_0 + (T_{PS,1}^2 - T_{PS,2}^2)c^2 &= d_1^2 - d_2^2 \\
2(x_1 - x_3)x_0 - 2(y_1 - y_3)y_0 + (T_{PS,1}^2 - T_{PS,3}^2)c^2 &= d_1^2 - d_3^2 \\
2(x_1 - x_4)x_0 - 2(y_1 - y_4)y_0 + (T_{PS,1}^2 - T_{PS,4}^2)c^2 &= d_1^2 - d_4^2.
\end{aligned} \tag{1.B}$$

Nepoznanica R_0^2 odredi se naknadno iz bilo koje od jednadžba (16). Preostale tri nepoznanice odrede se iz sustava (1.B) primjenom Cramerovog pravila (Bronštejn i Semendjajev, 1962; Marković, 1965):

$$x_0 = \frac{\det Sx_0}{\det S}, \quad y_0 = \frac{\det Sy_0}{\det S}, \quad c^2 = \frac{\det Sc^2}{\det S}, \tag{2.B}$$

gdje je $\det S$ determinanta sustava (1.B) koja glasi:

$$\det S = \begin{vmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & T_{PS,1}^2 - T_{PS,2}^2 \\ 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) & T_{PS,1}^2 - T_{PS,3}^2 \\ 2(x_1 - x_4) & 2(y_1 - y_4) & T_{PS,1}^2 - T_{PS,4}^2 \end{vmatrix}. \tag{3.B}$$

Determinante $\det Sx_0$, $\det Sy_0$ i $\det Sc^2$ dobiju se tako da se u determinantu $\det S$ uvrste desne strane jednadžba (1.B) u stupac koeficijenta nepoznanice koju se izračunava. Tako je, npr. determinanta $\det Sy_0$:

$$\det Sy_0 = \begin{vmatrix} 2(x_1 - x_2) & d_1^2 - d_2^2 & T_{PS,1}^2 - T_{PS,2}^2 \\ 2(x_1 - x_3) & d_1^2 - d_3^2 & T_{PS,1}^2 - T_{PS,3}^2 \\ 2(x_1 - x_4) & d_1^2 - d_4^2 & T_{PS,1}^2 - T_{PS,4}^2 \end{vmatrix} \tag{4.B}$$

Vrijednost determinante trećeg reda lako se izračuna Sarusovim pravilom (Bronštejn i Semendjajev, 1962).

Dodatak C

O rješivosti jednadžba raspostiranja u slučaju da sve četiri postaje leže na istom pravcu

Već je u poglavlju 2. rečeno da se sve četiri seizmološke postaje ne smiju nalaziti na jednom pravcu. Pretpostavimo suprotno, neka taj uvjet nije zadovoljen, a jednadžba pravca koji prolazi kroz sve četiri postaje neka bude $y = ex + f$. Tada će za svaku od postaja vrijediti izrazi:

$$\begin{aligned}
y_1 &= ex_1 + f \\
y_2 &= ex_2 + f \\
y_3 &= ex_3 + f \\
y_4 &= ex_4 + f
\end{aligned} \tag{1.C}$$

Uvrste li se ovi izrazi u sustav (16) jednadžba raspostiranja, koje određuju položaj žarišta potresa, dobiva se:

$$\begin{aligned}
R_0^2 - (2x_1)x_0 - (2ex_1 + f)y_0 - T_{PS,1}^2 c^2 &= -d_1^2 \\
R_0^2 - (2x_2)x_0 - (2ex_2 + f)y_0 - T_{PS,2}^2 c^2 &= -d_2^2 \\
R_0^2 - (2x_3)x_0 - (2ex_3 + f)y_0 - T_{PS,3}^2 c^2 &= -d_3^2 \\
R_0^2 - (2x_4)x_0 - (2ex_4 + f)y_0 - T_{PS,4}^2 c^2 &= -d_4^2
\end{aligned} \tag{2.C}$$

Poznato je da je sustav nehomogenih linearnih jednadžba rješiv ako je determinanta sustava različita od nule (Bronštejn i Semendjajev, 1962; Marković, 1965). Determinanta $\det S$ sustava jednadžba (2.C) glasi:

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1 & -2ex_1 - 2f & -T_{PS,1}^2 \\ 1 & -2x_2 & -2ex_2 - 2f & -T_{PS,2}^2 \\ 1 & -2x_3 & -2ex_3 - 2f & -T_{PS,3}^2 \\ 1 & -2x_4 & -2ex_4 - 2f & -T_{PS,4}^2 \end{vmatrix} \quad (3.C)$$

Lako je primjetiti da je treći stupac linearna kombinacija drugog stupca pa je prema poznatim pravilima (Marković, 1965) ta determinanta jednaka nuli.

Ovime je u potpunosti opravdano ograničenje da se za uspješnu primjenu ove metode ne smiju sve četiri postaje nalaziti na jednomu pravcu.