# Najbolja $l_\infty$ aproksimacija rješenja sustava linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom

Ivana Kuzmanović*

**Sažetak**. *U radu se promatra karakterizacija i metode određivanja najbolje $l_\infty$ aproksimacije rješenja sustava linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.*

**Ključne riječi:** *preodređen sustav linearnih jednadžbi, sustav linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, Čebiševljeva aproksimacija, $l_\infty$ aproksimacija*

**The best $l_\infty$ solution of the system of linear equations with one unknown**

**Abstract**. *In this paper characterization and methods for determing the best $l_\infty$ solution of the system of linear equations with one unknown is considered.*

**Key words:** *overdetermined system of linear equations, system of linear equations with one unknown, Chebyshev approximation, $l_\infty$ approximation*

## 1. Uvod

Neka je zadan sustav linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom

$$a_i x = b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i \in I,\ I = \{1, \dots, m\},\ m > 1 \tag{1}$$

Kako se radi o sustavu s više jednadžbi nego nepoznanica (takozvani preodređeni sustav), ovaj problem općenito nema rješenje. Iako se na prvi pogled sustavi bez rješenja ne čine zanimljivim, takvi sustavi se pojavljuju u praksi i potrebno je na neki način odrediti aproksimaciju rješenja.

**Primjer 1.** *Da bi se odredila konstanta elastičnosti žice, vrši se mjerenje linearne deformacije pri djelovanju različitih sila. Prema Hookeovom zakonu, veza između sile $a$, deformacije $b$ i konstante elastičnosti $x$ je $ax = b$. Zbog pogrešaka*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: ikuzmano@mathos.hr

*uzrokovanih nepreciznošću mjernih uređaja, potrebno je izvršiti više mjerenja od kojih svako daje jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Na taj način problem određivanja konstante elastičnosti svodi se na problem rješavanja preodređenog sustava linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.*

Zapišimo sustav (1) u obliku

$$a_i x - b_i = 0,\ i \in I,$$

i označimo

$$r_i(x) = a_i x - b_i,\ i \in I.$$

Funkcije $r_i$ nazivaju se reziduali. Kad bi ovaj sustav imao rješenje $x^*$, vrijedilo bi $r_i(x^*) = 0,\ i \in I$. Kako takav $x^*$ općenito ne postoji, ima smisla kao aproksimacijsko rješenje uzeti onaj $x$ za koji je najveće apsolutno odstupanje (od nule) minimalno, odnosno točku minimuma funkcije

$$\Delta(x) = \max_{i\in I} |a_i x - b_i| = \max_{i\in I} |r_i(x)|. \tag{2}$$

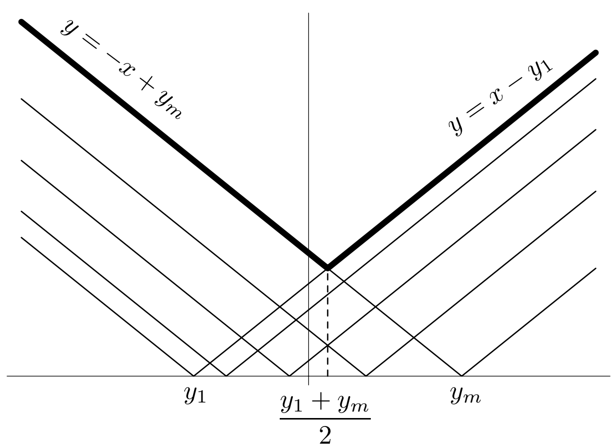
Točka minimuma funkcije $\Delta$ naziva se najbolja $l_\infty$ aproksimacija rješenja sustava linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.

**Primjer 2.** *Težinski problem mjerenja u $l_\infty$-normi*
*Zadani su podaci mjerenja $(\omega_i, y_i)$, $i \in I$, $\omega_i > 0$. Treba pronaći najbolju aproksimaciju mjerene veličine tako da najveće težinsko odstupanje bude minimalno, tj. treba odrediti minimum funkcije*

$$\Delta(x) = \max_{i\in I} \omega_i |x - y_i|. \tag{3}$$

*Specijalno, za $\omega_1 = \cdots = \omega_m = 1$, rješenje problema mjerenja (3) je jednostavno. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su podaci sortirani, odnosno*

$$y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_m.$$




Slika 1. Graf funkcije $\Delta(x) = \max_{i\in I} |x - y_i|$.

*Uočimo* (Slika 1.) *da je*

$$\Delta(x) = \begin{cases} -x + y_m, & x \le \frac{y_1+y_m}{2} \\ x - y_1, & x > \frac{y_1+y_m}{2} \end{cases},$$

*te je*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \Delta(x) = \Delta\left(\frac{y_1+y_m}{2}\right) = \frac{y_m - y_1}{2}.$$

*U slučaju kada je barem jedna težina različita od jedan, težinski problem mjerenja u $l_\infty$ normi svodi se na problem $l_\infty$ rješenja sustava linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom. Uz oznaku $\tilde{y}_i := \omega_i y_i$, problem minimuma (3) možemo pisati*

$$\Delta(x) = \max_{i\in I} |\omega_i x - \tilde{y}_i| \to \min_{x\in\mathbb{R}}, \quad \omega_i > 0,$$

*a ovo je specijalni slučaj $l_\infty$ rješenja sustava jednadžbi s jednom nepoznanicom*

$$\max |a_i x - b_i| \to \min_{x\in\mathbb{R}},$$

*gdje uvijek možemo pretpostaviti da je $a_i > 0$, $i \in I$.*

## 2. Karakterizacija rješenja

Da bi odredili najbolju $l_\infty$ aproksimacije rješenja sustava jednadžbi (1), umjesto problema određivanja točke minimuma funkcije

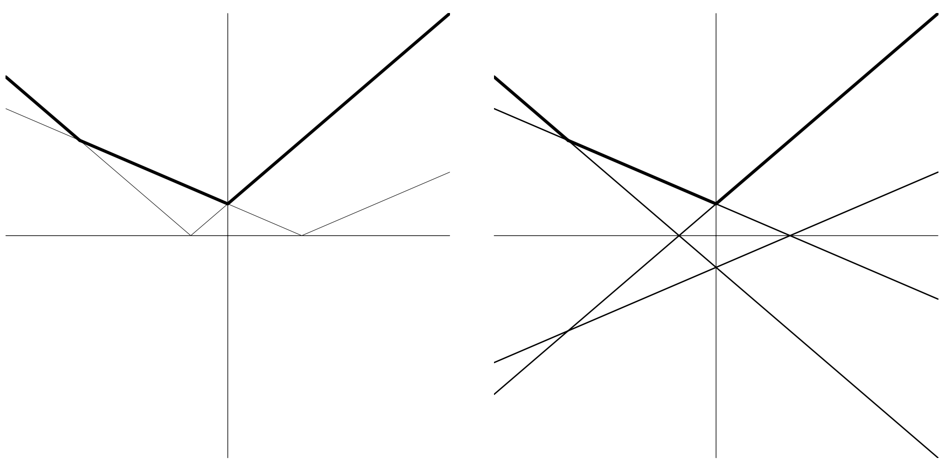
$$\Delta(x) = \max_{i\in I} |a_i x - b_i| = \max_{i\in I} |r_i(x)|,$$

možemo promatrati problem određivanja točke minimuma funkcije

$$\delta(x) = \max_{i\in I_2} (a_i x - b_i) = \max_{i\in I_2} r_i(x)$$

pri čemu je

$$I_2 = \{1,\dots,m,m+1,\dots,2m\}, \quad a_{i+m} = -a_i, \quad b_{i+m} = -b_i, \quad r_{i+m}(x) = -r_i(x), \quad i \in I.$$



Slika 2. Grafovi funkcija $\Delta(x) = \max_i |r_i(x)|$ (lijevo) i $\delta(x) = \max_i r_i(x)$ (desno)

**Teorem 1.** *(Karakterizacija točke minimuma funkcije $\delta$)*
*Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $M = \{k \in I_2 : r_k(x) = \delta(x)\}$. Točka $x$ je točka minimuma funkcije $\delta$ ako i samo ako postoje $i, j \in M$ takvi da je $a_i a_j \leq 0$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $a_i a_j > 0,\ \forall i, j \in M$. Tada postoji $h \in \mathbb{R}$ takav da je $a_i h > 0,\ \forall i \in M$. Tada je i $\alpha = \min(a_i h) > 0$. Za $i \in M$ je

$$r_i(x - \lambda h) = r_i(x) - \lambda a_i x \leq \delta(z) - \lambda\alpha,$$

te se rezidualima u smjeru $-h$ smanjuje vrijednost. Kako za $i \notin M$ vrijedi $r_i(x) < \delta(x)$, zbog neprekidnosti reziduala postoji neka okolina $U$ od $x$ na kojoj je $r_i(z) < \delta(z),\ \forall z \in U$. Dakle, $x$ ne može biti točka minimuma funkcije $\delta$.
Obratno, pretpostavimo da $x$ nije točka minimuma funkcije $\delta$. Tada postoji točka u kojoj funkcija $\delta$ postiže manju vrijednost, tj. postoji $h \in \mathbb{R}$ takav da je $\delta(x-h) < \delta(z)$. Za $i \in M$ je

$$r_i(x - h) \leq \delta(x - h) < \delta(h) = r_i(x),$$

odnosno

$$a_i(x - h) - b_i < a_i x - b_i,$$

iz čega slijedi da je $a_i h > 0,\ \forall i \in M$, a to je moguće samo ako su svi $a_i,\ i \in M$ istog predznaka, tj. $a_i a_j > 0,\ \forall i, j \in M$.

□

Slična tvrdnja vrijedi i za funkciju $\Delta$.

**Teorem 2.** *(Karakterizacija točke minimuma funkcije $\Delta$)*
*Neka je $x \in \mathbb{R}$, $\sigma_i = \operatorname{sign} r_i(x)$ i $M = \{k \in I : |r_k(x)| = \Delta(x)\}$. Točka $x$ je točka minimuma funkcije $\Delta$ ako i samo ako postoje $i, j \in M$ takvi da je $(\sigma_i a_i)(\sigma_j a_j) \leq 0$.*

## 3. Metode traženja najboljeg $l_\infty$ rješenja

### 3.1. Metoda silaska po vrhovima

Neka je $x_0$ proizvoljna početna aproksimacija. Najprije je potrebno odrediti skup $M = \{i \in I_2 : r_i(x_0) = \delta(x_0)\}$ indeksa svih reziduala koji u točki $x_0$ poprimaju istu vrijednost kao i funkcija $\delta$. Ako postoje indeksi $j, k \in M$ takvi da je $a_j a_k \leq 0$, onda je prema Teoremu 1. $x_0$ rješenje. U suprotnom, potrebno je odrediti $j \in M$ za koji je $|a_j|$ minimalan. Sljedeća aproksimacija je prva točka $x$ s lijeva (ako je $a_j > 0$) ili s desna (ako je $a_j < 0$) od $x_0$ takva da je $r_j(x) = r_i(x)$.

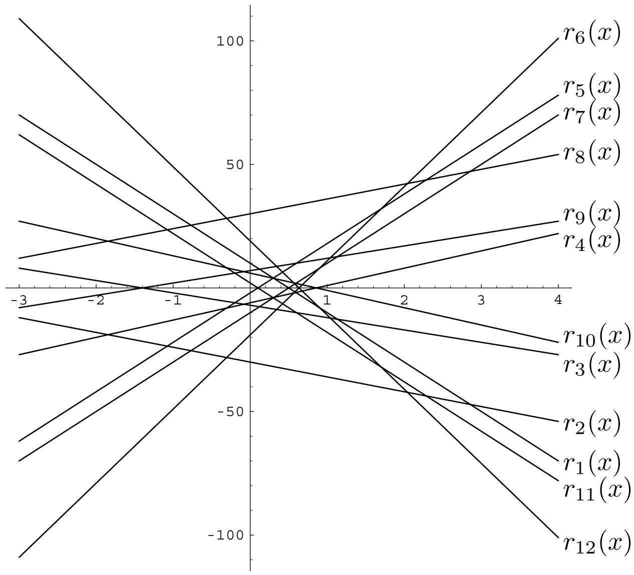
**Primjer 3.** *Zadan je sustav $a_i x = b_i$, $i = 1, \ldots, 6$, gdje je*

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $-20$ | $-6$ | $-5$ | 7 | 20 | 30 |
| $b$ | $-10$ | 30 | 7 | 6 | 2 | 19 |

*Najbolja $l_\infty$ aproksimacija rješenja danog sustava je točka minimuma funkcije*

$$\delta(x) = \max_{1 \leq i \leq 12} r_i(x),$$

*pri čemu je* $r_1(x) = -20x+10$, $r_2(x) = -6x-30$, $r_3(x) = -5x-7$, $r_4(x) = 7x-6$, $r_5(x) = 20x-2$, $r_6(x) = 30x-19$, $r_{i+6}(x) = -r_i(x)$, $i = 1, \ldots, 6$.

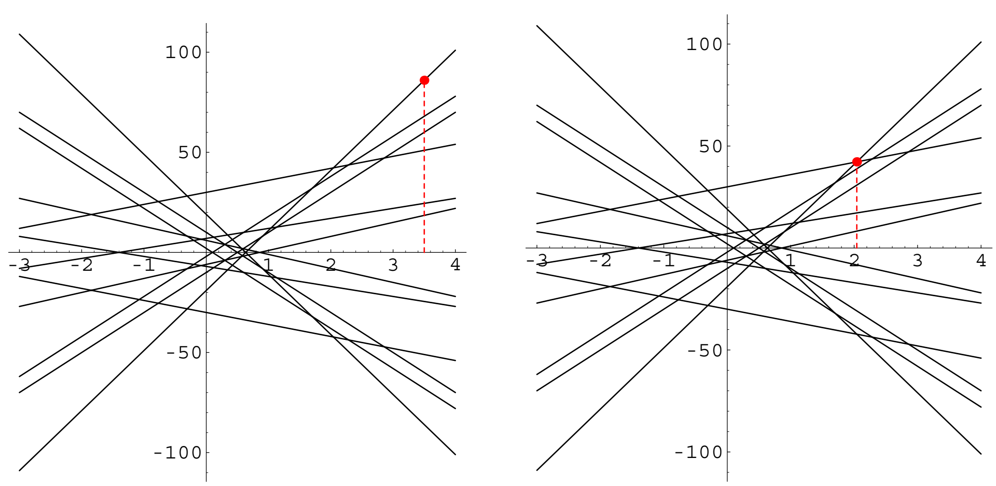



Slika 3. Grafovi funkcija $r_i(x)$, $i = 1, \ldots, 12$

*Neka je dana početna aproksimacija* $x_0 = 3.5$.

P*rva iteracija*

$\delta(x_0) = 86, \quad M = \{6\}$
*Sljedeća aproksimacija je rješenje jednadžbe* $r_6(x) = r_8(x)$, *tj* $x_1 = 2.04167$.

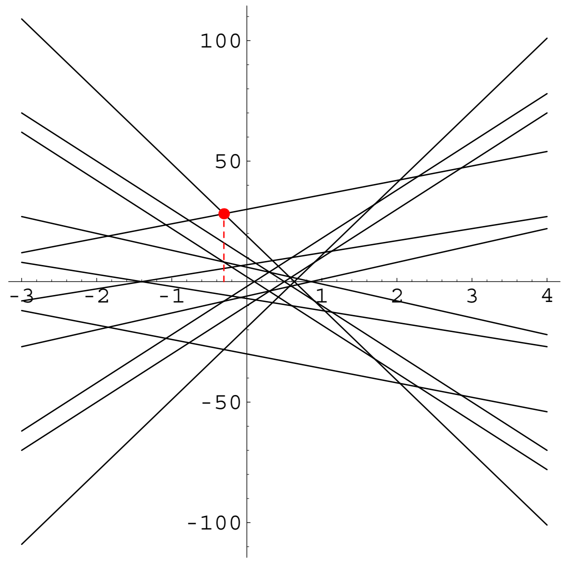



Slika 4. Metoda silaska po vrhovima - početna aproksimacija (lijevo), prva iteracija (desno)

D*ruga iteracija*

$\delta(x_1) = 42.25, \quad M = \{6, 8\}$

*Kako je* $a_6 \cdot a_8 = 30 \cdot 6 > 0$, $x_1$ *nije rješenje. Sljedeća aproksimacija je rješenje jednadžbe* $r_8(x) = r_{12}(x)$, *tj.* $x_2 = -0.305556$.




Slika 5. Metoda silaska po vrhovima - druga iteracija

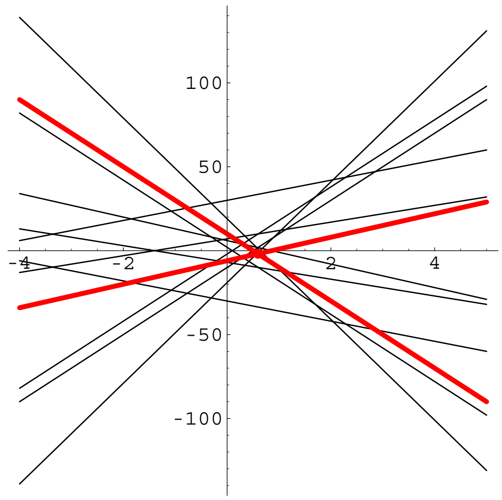
*Kako je* $\delta(x_2) = r_8(x_2) = r_{12}(x_2)$ *i* $a_8 \cdot a_{12} = 6 \cdot (-30) < 0$, $x_2$ *je točka minimuma funkcije* $\delta$.

## 3.2. Metoda uzlaska po vrhovima

U svakoj iteraciji ove metode aproksimacija rješenja je apscisa sjecišta dvaju pravaca od kojih je jedan rastući, drugi padajući. Neka je $x_0$ aproksimacija u nekoj iteraciji i $r_i$, $r_j$ reziduali takvi da je $a_i \leq 0 \leq a_j$ i $r_i(x_0) = r_j(x_0)$. Za dobivanje sljedeće aproksimacije, odredi se rezidual $r_k$ za koji je $r_k(x_0) = \delta(x_0)$.

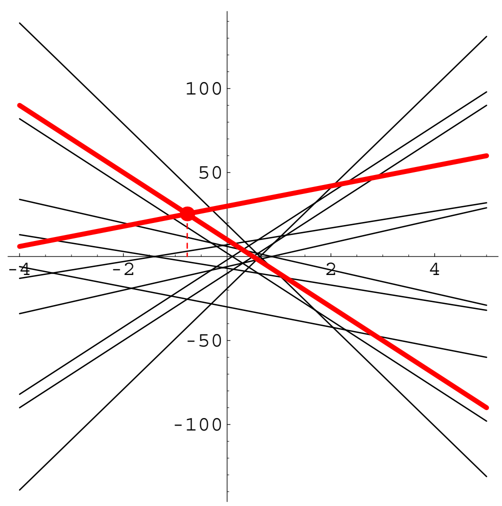
- Ako je $a_k > 0$, sljedeća aproksimacija je apscisa sjecišta grafova reziduala $r_i$ i $r_k$.
- Ako je $a_k < 0$, sljedeća aproksimacija je apscisa sjecišta grafova reziduala $r_j$ i $r_k$.
- Ako je $a_k = 0$, onda je sljedeća aproksimacija apscisa sjecišta grafova reziduala $r_k$ i bilo kojeg od $r_i$, $r_j$ kojemu koeficijent smjera nije nula.

**Primjer 4.** *Odredimo rješenje prethodnog primjera metodom uzlaska po vrhovima. Neka je početna iteracija rješenje jednadžbe* $r_1(x) = r_4(x)$.



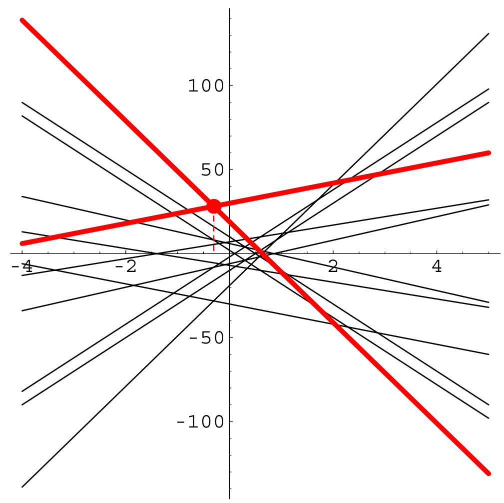

Slika 6. Metoda uzlaska po vrhovima - početna aproksimacija

P*rva iteracija*
$\delta(x_0) = 33.5556$, $r_8(x_0) = \delta(x_0)$, $a_8 = 6 > 0$
*Sljedeća aproksimacija je rješenje jednadžbe* $r_1(x) = r_8(x)$, *tj.* $x_1 = -0.769231$.




Slika 7. Metoda uzlaska po vrhovima - prva iteracija

D*ruga iteracija*
$\delta(x_1) = 42.0769$, $r_{12}(x_1) = \delta(x_1)$, $a_{12} = -30 < 0$
*Sljedeća aproksimacija je rješenje jednadžbe* $r_8(x) = r_{12}(x)$, *tj.* $x_2 = -0.305556$.




Slika 8. Metoda uzlaska po vrhovima - druga iteracija

*Kako je* $r_{12}(x_2) = r_8(x_2) = \delta(x_2)$ *i* $a_8 a_{12} = 6 \cdot (-30) < 0$, $x_2$ *je točka minimuma funkcije* $\delta$.

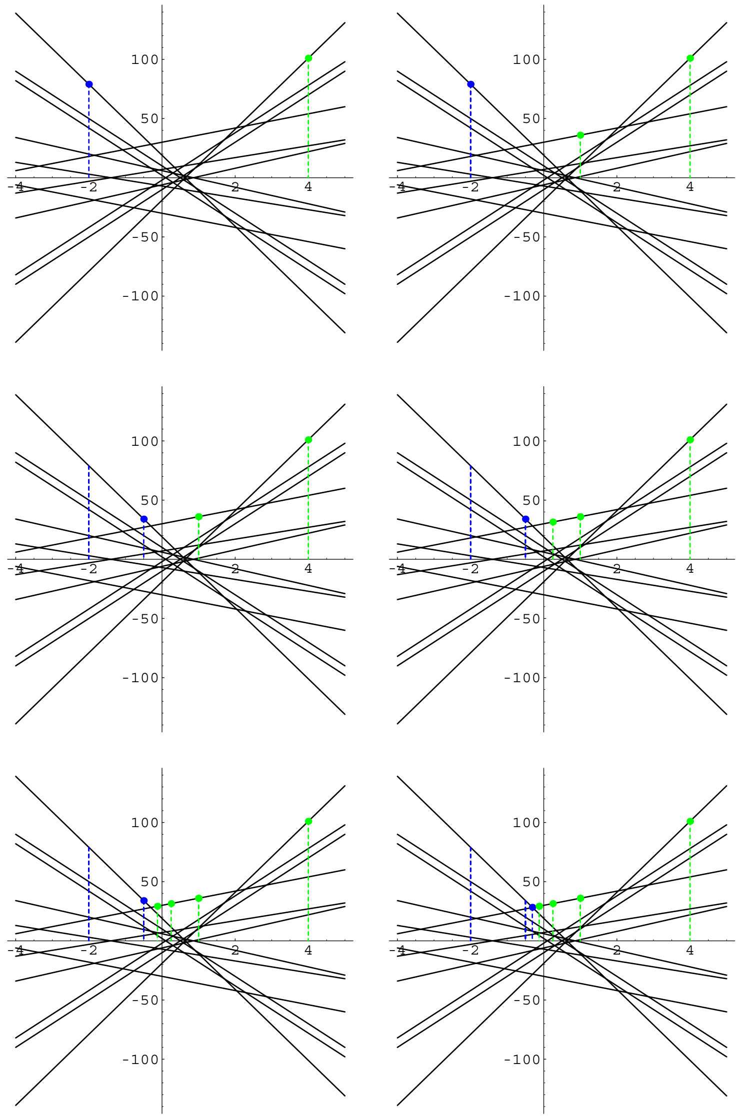
## 3.3. Metoda pretraživanja

U svakom koraku metode pretraživanja imamo dvije aproksimacije $x_0$, $y_0$, $x_0 < y_0$ koje se nalaze na suprotnim stranama od točke minimuma. Neka je $r_i(x_0) = \delta(x_0)$ i $r_j(y_0) = \delta(y_0)$. Tada je $a_i \le 0 \le a_j$. Ako je $a_i = 0$, $x_0$ je rješenje. Ako je $a_j = 0$, $y_0$ je rješenje. Neka je $z_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$ i $r_k(z_0) = \delta(z_0)$

- Ako je $a_k > 0$, zamjenimo $y_0$ sa $z_0$ i $j$ sa $k$.
- Ako je $a_k < 0$, zamjenimo $x_0$ sa $z_0$ i $i$ sa $k$.

Postupak staje kad je razlika $y_0 - x_0$ manja od nekog unaprijed zadanog $\epsilon$.

**Primjer 5.** *Na* Slici 9. *prikazan je iterativni postupak metode traženja za sustav iz primjera* 3 *s početnim aproksimacijama* $x_0 = -2$, $y_0 = 4$.




Slika 9. Iterativni postupak metode pretraživanja

## References

[1] E. W. Cheney, *Intoduction to Approximation Theory*, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[2] D. Jukić, *Minimizacija najvećeg apsolutnog odstupanja*, Osječka matematička škola **1**(2001) pp 118.

[3] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[4] N. M. Korneenko, H. Martini, *Hyperplane approximation and related topics*, in: *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, (J. Pach, Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] R. Scitovski, *Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.

[6] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1999.

[7] M. R. Osborne, *Finite Algorithms in Optimization and Data Analysis*, Wiley, Chichester, 1985.

[8] A. Schöbel, *Locating Lines and Hyperplanes: Theory and Algorithms*, Springer Verlag, Berlin, 1999.

[9] H. Späth, *Mathematical Algorithms for Linear Regression*, Academic Press, 1992.

[10] G. A. Watson, *Approximation Theory and Numerical Methods*, Wiley, Chichester, 1980.