Ante Puljić
*Ilko Vrankić**

UDK 330.112.2
JEL Classification C61
Izvorni znanstveni rad

OD TOTALNOG DIFERENCIJALA DO MAKSIMALNOG EKONOMSKOG PROFITA**

U članku se nastoji na najsažetiji način i što je moguće jednostavnije objasniti optimizacija funkcije bez ograničenja. Radi toga se prvo objašnjava pojam kritične točke, točke u kojoj je totalni diferencijal funkcije jednak nuli i u kojoj vrijednost funkcije časomično niti raste niti pada. Nakon utvrđivanja stacionarne točke, predznak vrijednosti totalnog diferencijala drugoga reda, koji se promatra kao kvadratna forma, u kritičnoj točki odlučuje ima li funkcija u toj točki relativnu maksimalnu ili relativnu minimalnu vrijednost. Ako je Hesseova matrica koeficijenata tako zamišljene kvadratne forme u kritičnoj točki negativno definitna, tada je totalni diferencijal drugoga reda u toj točki manji od nule i funkcija u kritičnoj točki ima relativnu maksimalnu vrijednost, a ako je ta matrica pozitivno definitna, onda funkcija u kritičnoj točki ima relativnu minimalnu vrijednost. Posebna je pozornost posvećena objašnjenju da je spomenuta matrica negativno definitna kada su vrijednosti njezinih glavnih minora neparnoga reda manje od nule i vrijednosti glavnih minora parnoga reda veće od nule i da je ona pozitivno definitna kada su vrijednosti svih njezinih glavnih minora veće od nule.

Primjena se optimizacije funkcije bez ograničenja ilustrira na dva modela ekonomskog profita: na modelu koji se zasniva na pretpostavci da je poznata funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova proizvodnje i na modelu koji se zasniva na pretpostavci da je poznata funkcija proizvodnje. U prvom

---

* A. Puljić, redoviti profesor i I. Vrankić, znanstveni novak, obojica na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Rad primljen u uredništvo: 8. 7. 2004.

** Ovaj je članak jedan od plodova znanstvenog projekta Ekonomskog fakulteta Zagreb, “Teorem o maksimumu i njegova važnost u komparativno statičkoj analizi”, koji vodi prof. dr. sc. Ante Puljić.

se modelu donosi odluka o kritičnoj količini proizvodnje koja maksimizira ekonomski profit, a u drugom odluka o kritičnim količinama faktora proizvodnje koje maksimiziraju ekonomski profit. Dokazuje se da optimizacija tako formuliranih modela ekonomskog profita dovodi do jednakog maksimalnog ekonomskog profita.

Ključne riječi: totalni diferencijal, stacionarna točka, ekstrem funkcije, konkavnost i konveksnost, kvadratna forma, Hesseova matrica, definitnost kvadratne forme, kritična količina proizvodnje, kritična količina faktora proizvodnje, ekonomski troškovi, ekonomski profit.

Uvod

Stroga matematička formalizacija ekonomskih problema nerijetko ekonomistima i studentima ekonomije ostavlja dojam nedokučivosti i stvara nepremostive poteškoće i osjećaj intelektualne inferiornosti. Cilj je ovoga članka pripomoći da se taj dojam i taj osjećaj izgube. Uvjereni smo da se on može ostvariti ako uspostavimo jednostavan i prirodan odnos između stroge matematičke formalizacije i uobičajenog načina opisivanja ekonomskih pojava. Ovaj pokušaj, koji nije nimalo lak, zasad ćemo ograničiti na problem optimizacije bez ograničenja. Čini nam se da prijeko potrebne i naoko veoma složene matematičke pojmove možemo objasniti na način znatno jednostavniji od onoga koji je uobičajen. Na početku našega puta definirat ćemo pojam totalnog diferencijala i pokazat ćemo da u kritičnoj točki funkcija časomično (trenutačno) ni raste niti pada, odnosno da je vrijednost totalnog diferencijala u toj točki jednaka nuli. Potom ćemo pokazati kako se određuju konkavnost i konveksnost funkcije u bilo kojoj točki uz pomoć predznaka totalnog diferencijala drugoga reda koji ćemo shvaćati kao kvadratnu formu. Nadamo se da će način na koji određujemo predznak kvadratne forme, ili kako se to često kaže definitnost kvadratne forme, biti veoma razumljiv i jednostavan svakom čitatelju. Kada određivanje definitnosti kvadratne forme postane posve jasno, onda će postati i posve jasno o kakvoj se vrsti ekstrema funkcije radi u kritičnoj točki.

Primjenu optimizacije bez ograničenja ilustrirat ćemo na problemu maksimizacije profita u uvjetima savršene konkurencije u dugom roku. Profit ćemo maksimizirati na dva načina. Prvi način polazi od stajališta da je poznata funkcija ekonomskih troškova proizvodnje i da je varijabla o kojoj poduzeće odlučuje količina proizvodnje. Drugi način polazi od stajališta da je poznata funkcija proizvodnje i da su varijable o kojima poduzeće odlučuje količine faktora proizvodnje. Napokon, formalno ćemo dokazati, na način kakav u literaturi nismo susreli, da oba pristupa dovode do istoga rezultata.

Ovaj smo članak zamislili kao jedinstvenu cjelinu koja na jednome mjestu na veoma jednostavan način pruža sve ono što je prijeko potrebno i dostatno za potpuno razumijevanje optimizacije bez ograničenja. Nadamo se da će i čitatelji prosuditi da smo u našim nakanama podobrano uspjeli.

Kritične vrijednosti neovisnih varijabli

Ako je realna funkcija $y = f(x)$ definirana na otvorenom podskupu skupa realnih brojeva, diferencijabilna u točki iz tog skupa, $x = a$, jednadžba je tangente na graf funkcije u točki $[\, a, f(a) \,]$

$$y = f(a) + f_x(a)\,(x - a), \tag{1}$$

gdje je $f_x(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ koeficijent smjera tangente. Katkada, obično kada je oblik neke funkcije $y = f(x)$ zamršen, graf funkcije aproksimiramo tangentom na graf funkcije u točki $[a, f(a)]$. U tome slučaju govorimo o lokalno najboljoj linearnoj aproksimaciji funkcije $y = f(x)$ oko a i s time u skladu pišemo

$$f(x) \approx f(a) + f_x(a)\,(x - a), \tag{2}$$

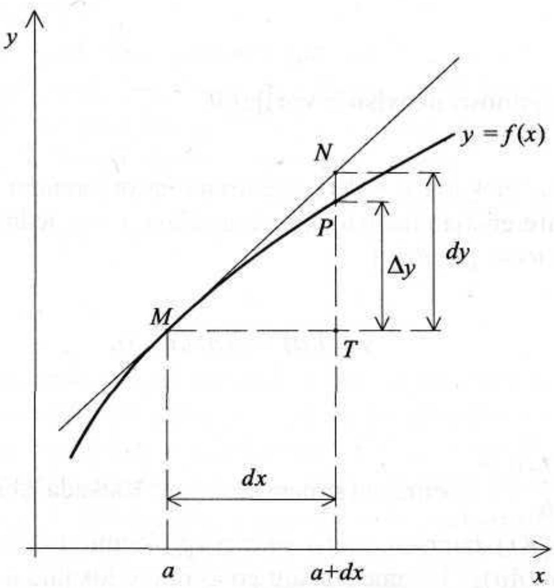
gdje je razlika između vrijednosti varijable x i konstante a veoma mala. Aproksimacija grafa funkcije u tijesnom je odnosu s njezinim diferencijalom prvoga reda. Diferencijal prvoga reda, dy, neke funkcije $y = f(x)$, koja je definirana na otvorenome skupu i diferencijabilna u svakoj točki toga skupa, umnožak je derivacije funkcije, f_x, i diferencijala neovisne varijable, odnosno prirasta, dx. Ili u simboličkom zapisu,

$$dy(a) = f_x(a)dx,$$

$$dy = f_x dx\,. \tag{3}$$

Slika 1.

GRAFIČKI PRIKAZ DIFERENCIJALA



Diferencijal prvoga reda, *dy*, jest promjena ordinate točke tangente nakon što se vrijednost neovisne varijable povećala za *dx*. Stvarna je promjena vrijednosti funkcije Δ*y*. Kada *dx* teži nuli, tada razlika između stvarne promjene, Δ*y*, i njezine aproksimacije, diferencijala, *dy*, teži nuli brže nego *dx*.

Kada se vrijednost neovisne varijable promijeni za *dx*, tada stvarna promjena vrijednosti funkcije iznosi

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x). \tag{4}$$

Razlika između stvarne promjene vrijednosti funkcije i diferencijala te funkcije

$$\Delta y - dy = dx\left(\frac{\Delta y}{dx} - f_x\right)$$

teži nuli brže nego dx, jer $\frac{\Delta y}{dx} - f_x$ teži nuli kada *dx* teži nuli. Zbog toga stvarnu promjenu vrijednosti funkcije možemo aproksimirati njezinim diferencijalom

$$\Delta y \approx dy = f_x dx \ , \tag{5}$$

gdje je f_x derivacija funkcije i dx zadani broj.

Diferencijal prvoga reda, dy, aproksimacija je stvarne promjene funkcije Δy. Pojam diferencijala prvoga reda funkcije jedne varijable možemo lako definirati kao opći pojam totalnog diferencijala funkcije koja ima više neovisnih varijabli. Totalni diferencijal prvoga reda neke funkcije $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, koja je definirana na otvorenom podskupu $D \subset R^n$ i diferencijabilna u svakoj točki toga podskupa, zbroj je umnožaka parcijalnih derivacija i diferencijala odgovarajućih neovisnih varijabli:

$$dy = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \ ... \ + f_n\, dx_n \ , \tag{6}$$

gdje su $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, …, $f_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ parcijalne derivacije funkcije i dx_1, dx_2, …, dx_n zadani brojevi. Svaki pribrojnik na desnoj strani izraza (6) izražava doprinos promjene odgovarajuće neovisne varijable ukupnoj aproksimaciji promjene vrijednosti funkcije, dy.

Točka u kojoj je diferencijal funkcije jednak nuli zaslužuje posebnu pozornost. Označimo tu točku sa x^*. Diferencijal prvoga reda neke funkcije $y = f(x)$ u nekoj točki $x = x^*$, kada je $dx \neq 0$, može biti jednak nuli, $dy = 0$, samo ako je $f_x(x^*) = 0$. Kada je $f_x(x^*) = 0$, funkcija $y = f(x)$ časomično niti raste niti pada u toj točki. Vrijednost $x = x^*$ za koju je $f_x(x^*) = 0$ naziva se kritičnom vrijednosti ili kritičnom točkom neovisne varijable, vrijednost $f(x^*)$ stacionarnom vrijednosti funkcije i točka $[x^*, f(x^*)]$ na grafu funkcije stacionarnom točkom. Tangenta na graf funkcije u točki $[x^*, f(x^*)]$ usporedna je s osi x.

Očito je da je diferencijal prvoga reda neke funkcije jednak nuli, dy = 0, u kritičnoj točki u kojoj je ispunjen nuždan uvjet prvoga reda za lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije:

$$\frac{dy(x^*)}{dx} = f_x(x^*) = 0 \, . \tag{7}$$

Stoga je posve jasno da taj nužni uvjet prvoga reda za lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije možemo alternativno izraziti zapisom

$$dy = 0. \tag{8}$$

Ono što vrijedi za funkciju jedne neovisne varijable vrijedi i za funkciju koja ima više neovisnih varijabli. Uvjet prvoga reda da u točki $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ bude lokalni maksimum ili lokalni minimum funkcije $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, to jest da $\mathbf{x}^*$ bude kritična točka te funkcije jest da u točki $\mathbf{x}^*$ totalni diferencijal prvoga reda te funkcije

$$dy = f_1(\mathbf{x}^*)dx_1 + f_2(\mathbf{x}^*)dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}^*)dx_n$$

bude jednak nuli ($dy = 0$) za svaku kombinaciju diferencijala ($dx_1, dx_2, \dots dx_n$). Očito je da se to može dogoditi samo onda kada je $f_1(\mathbf{x}^*) = f_2(\mathbf{x}^*) = \dots = f_n(\mathbf{x}^*) = 0$. Do ovoga zaključka dolazimo tako da za bilo koji dx_i uvrstimo jedinicu i za preostale dx_j nulu. Uz prethodno objašnjenje uvjet prvoga reda za lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kao i u slučaju funkcije jedne varijable, izražavamo ovako

$$dy = 0\,. \tag{9}$$

Naravno, kada je ovaj uvjet ispunjen, kritična je točka vektor $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, stacionarna vrijednost funkcije $f(\mathbf{x}^*)$ i stacionarna točka $[\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)]$.

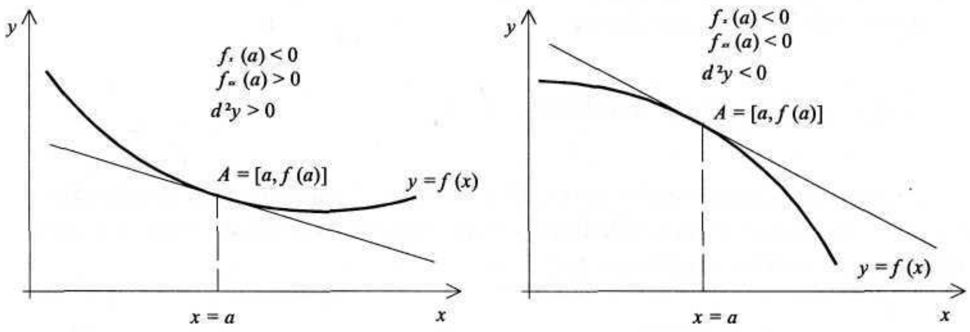
Uvjeti drugoga reda

Konkavnost i konveksnost funkcije

Prije nego što prijeđemo na objašnjenje dovoljnih uvjeta drugoga reda za lokalni maksimum i lokalni minimum, ukratko ćemo obrazložiti pojmove konkavnosti i konveksnosti funkcija. Neka funkcija $y = f(x)$ konkavna je u točki $x = a$, ako u vrlo maloj okolini (neposrednoj blizini) točke $[a, f(a)]$ graf funkcije leži ispod tangente koja prolazi tom točkom. Funkcija $y = f(x)$ konveksna je u točki $x = a$, ako u vrlo maloj okolini točke $[a, f(a)]$ graf funkcije leži iznad tangente koja prolazi tom točkom. O tome je li funkcija konkavna ili konveksna u vrlo maloj okolini točke a zaključujemo na osnovi saznanja smanjuje li se ili se povećava nagib tangente na graf u točki $[a, f(a)]$ kada vrijednost neovisne varijable x raste prolazeći točkom a. Ako se nagib tangente smanjuje, funkcija je strogo konkavna u vrlo maloj okolini točke a, a ako se njezin nagib povećava, funkcija je strogo konveksna u vrlo maloj okolini točke a. To znači da o konkavnosti ili o konveksnosti dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije u vrlo maloj okolini točke a zaključujemo na osnovi vrijednosti druge derivacije funkcije u $x = a$.

Slika 2.

KONKAVNOST I KONVEKSNOST FUNKCIJA



Lijeva slika prikazuje funkciju koja je strogo konveksna u okolini točke a, jer se nagib tangente povećava kada vrijednost neovisne varijable raste prolazeći točkom $x = a$. Desna slika prikazuje funkciju koja je strogo konkavna u okolini točke a, jer se nagib tangente smanjuje kad vrijednost neovisne varijable raste prolazeći točkom $x = a$.

Ako je $f_{xx}(a) < 0$, nagib se tangente na grafu funkcije smanjuje kada prolazimo točkom $x = a$, povećavajući vrijednost neovisne varijable x. U tom je slučaju funkcija $y = f(x)$ strogo konkavna u vrlo maloj okolini točke a. No, ako je $f_{xx}(a) > 0$, tada se nagib tangente na grafu funkcije povećava dok povećavajući vrijednost neovisne varijable x prolazimo točkom $x = a$. Stoga zaključujemo da je u tom slučaju funkcija $y = f(x)$ u vrlo maloj okolini točke a strogo konveksna.

Odluka o tome je li funkcija konkavna ili konveksna u vrlo maloj okolini točke a na osnovi vrijednosti druge derivacije funkcije u $x = a$, ekvivalentna je odluci koja bi bila donesena na osnovi predznaka vrijednosti totalnog diferencijala drugoga reda u $x = a$.

Diferencijal drugoga reda neke funkcije $y = f(x)$ jest diferencijal prvoga reda diferencijala prvoga reda te funkcije ili simbolički

$$d^2y = d(dy)$$
$$d^2y = d(f_x\, dx)$$
$$d^2y = d(f_x)dx$$
$$d^2y = f_{xx}\, dx^2, \qquad (10)$$

gdje je $f_{xx} = \frac{df_x}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Određivanje stroge konkavnosti i stroge konveksnosti definitnošću kvadratne forme

Totalni diferencijal kao kvadratna forma

Ovdje je korisno dovesti u vezu određivanje predznaka totalnog diferencijala drugoga reda u nekoj točki s određivanjem definitnosti kvadratne forme. Polinom kojemu su svi članovi drugoga stupnja

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{11}$$

naziva se kvadratnom formom. Kvadratnu formu možemo izraziti i matričnim zapisom

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T \tag{12}$$

u kojem je **x** vektor redak neovisnih varijabli, **A** simetrična matrica koeficijenata kvadratne forme i $\mathbf{x}^T$ vektor stupac neovisnih varijabli. Kažemo da je kvadratna forma pozitivno definitna ako je i samo ako je $Q(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, osim za $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, a negativno definitna ako je i samo ako je $Q(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ osim za $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Očito da je $Q(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ kada je $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Kažemo da je kvadratna forma pozitivno semidefinitna ako je i samo ako je $Q(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, pri čemu jednakost može vrijediti i za određene vrijednosti $x_1, x_2, ..., x_n$ između kojih je barem jedna različita od nule, a negativno semidfinitna ako je i samo ako je $Q(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$, pri čemu jednakost može vrijediti i za određene vrijednosti $x_1, x_2, ..., x_n$ između kojih je barem jedna različita od nule. Kada kvadratna forma poprima suprotne predznake, onda kažemo da je kvadratna forma nedefinitna.

Da bismo jednostavnije odredili predznak totalnog diferencijala drugoga reda neke funkcije, totalni diferencijal drugoga reda te funkcije možemo promatrati kao kvadratnu formu, zamišljajući diferencijale neovisnih varijabli kao varijable kvadratne forme i matricu vrijednosti derivacija drugoga reda u nekoj točki kao matricu koeficijenata kvadratne forme. To ćemo u nastavku stalno činiti.

Diferencijal drugoga reda realne funkcije jedne neovisne realne varijable, d^2y, možemo sada promatrati kao kvadratnu formu s obzirom na varijablu dx, koje je koeficijent vrijednost druge derivacije u točki $x = a$, $f_{xx}(a)$. Kvadratna forma (10) može se zapisati u matričnom obliku

$$d^2y = [dx]\,[f_{xx}]\,[dx]. \tag{13}$$

Matrica $[f_{xx}]$, u ovom slučaju reda 1, naziva se Hesseovom matricom. Ako za $x = a$ i $dx \neq 0$, kvadratna forma poprima negativne vrijednosti, tada kažemo da je kvadratna forma negativno definitna, $d^2y < 0$, a ako, uz iste uvjete, poprima pozitivne vrijednosti, tada kažemo da je kvadratna forma pozitivno definitna, $d^2y > 0$. Iz (13) proizlazi da definitnost kvadratne forme, ovoga puta, ovisi isključivo o vrijednosti determinante Hesseove matrice. Budući da je za $dx \neq 0$, $dx^2 > 0$, kvadratna će forma biti negativno definitna, $d^2y < 0$, kada je determinanta Hesseove matrice manja od nule,

$$\left|\mathbf{H}\right| = \left|f_{xx}(a)\right| < 0. \tag{14}$$

Kada je ispunjena nejednakost (14), kažemo da je Hesseova matrica negativno definitna. Ako je determinanta Hesseove matrice veća od nule, kvadratna je forma pozitivno definitna, $d^2y > 0$. U tom slučaju kažemo da je Hesseova matrica također pozitivno definitna.

U skladu s prethodnim nalazom možemo reći da je dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ definirana na otvorenom konveksnom skupu $D \subset R$ strogo konkavna u vrlo maloj okolini točke $a \in D$, ako je Hesseova matrica u $x = a$ negativno definitna, ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma, kako sada promatramo diferencijal drugog reda u $x = a$, negativno definitna, $d^2y < 0$, a strogo konveksna u vrlo maloj okolini točke $a \in D$, ako je Hesseova matrica u $x = a$ pozitivno definitna, ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma, kako sada promatramo diferencijal drugoga reda u $x = a$, pozitivno definitna, $d^2y > 0$. Ako je Hesseova matrica negativno definitna za svako $x \in D$, ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma (diferencijal drugoga reda) negativno definitna za svako $x \in D$, $d^2y < 0$, tada je funkcija globalno strogo konkavna, odnosno strogo konkavna u okolini svake točke $x \in D$, a ako je Hesseova matrica pozitivno definitna za svako $x \in D$, ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma (diferencijal drugoga reda) pozitivno definitna za svako $x \in D$, $d^2y > 0$, tada je funkcija globalno strogo konveksna, odnosno strogo konveksna u okolini svake točke $x \in D$.

Određivanje definitnosti kad funkcija ima više neovisnih varijabli

Određivanje je definitnosti Hesseove matrice, odnosno definitnosti kvadratne forme, mnogo složenije kada se radi o funkciji koja ima više neovisnih varijabli. Ovdje ćemo pokazati kako se određuje definitnost Hesseove matrice, odnosno kvadratne forme, u slučaju kada funkcija ima tri neovisne varijable. To će biti dovoljno za stjecanje pouzdane predodžbe o tome kako se određuje definitnost Hesseove matrice, odnosno definitnost kvadratne forme, u općem slučaju, to jest u slučaju kada funkcija ima bilo koji konačan broj neovisnih varijabli.

Neka je

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \tag{15}$$

dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija neovisnih varijabli x_1, x_2 i x_3 i definirana na otvorenoj konveksnoj domeni $D \subset R^3$. U tom je slučaju totalni diferencijal drugoga reda

$$\begin{aligned} d^2y = {} & f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1dx_2 + f_{13}dx_1dx_3 + \\ & + f_{21}\, dx_2dx_1 + f_{22}dx_2^2 + f_{23}dx_2dx_3 + \\ & + f_{31}\, dx_3dx_1 + f_{32}dx_3dx_2 + f_{33}dx_3^2 \ , \end{aligned} \tag{16}$$

gdje su $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, i, j = 1, 2, 3. Prema Youngovom teoremu $f_{ij} = f_{ji}$. Otsad ćemo totalni diferencijal drugoga reda promatrati kao kvadratnu formu u varijablama dx_1, dx_2 i dx_3. Kada (16) zapišemo u obliku

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + 2f_{13}dx_1dx_3 + f_{22}dx_2^2 + 2f_{23}dx_2dx_3 + f_{33}dx_3^2 \tag{17}$$

i iz prva tri pribrojnika na desnoj strani izlučimo f_{11}, dobivamo

$$d^2y = f_{11}(dx_1^2 + 2\frac{f_{12}}{f_{11}}dx_1dx_2 + 2\frac{f_{13}}{f_{11}}dx_1dx_3) + f_{22}dx_2^2 + 2f_{23}dx_2dx_3 + f_{33}dx_3^2 \ .$$

Sada tri člana u malim zagradama nadopunjujemo do punoga kvadrata, a dodatke odbijemo, pa tako dobivamo izraz

$$d^2y = f_{11}(dx_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3)^2 - \frac{f_{12}^{\;2}}{f_{11}}dx_2^{\;2} - \frac{2f_{12}f_{13}}{f_{11}}dx_2dx_3 - \frac{f_{13}^{\;2}}{f_{11}}dx_3^{\;2} + f_{22}dx_2^{\;2} + \\ + 2f_{23}dx_2dx_3 + f_{33}dx_3^{\;2},$$

koji nakon sređivanja poprima oblik

$$d^2y = f_{11}(dx_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}{f_{11}}dx_2^{\;2} + 2\frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}}dx_2dx_3 + \\ + \frac{f_{11}f_{33} - f_{13}^{\;2}}{f_{11}}dx_3^{\;2}.$$

Dopunjujući do punoga kvadrata drugi i treći pribrojnik na desnoj strani i odbijajući dodatak dobivamo jednakost

$$d^2y = f_{11}(dx_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}{f_{11}}(dx_2 + \frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}dx_3)^2 - \\ - \frac{(f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13})^2}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2})}dx_3^{\;2} + \frac{f_{11}f_{33} - f_{13}^{\;2}}{f_{11}}dx_3^{\;2},$$

koja nakon sređivanja poprima konačni oblik

$$d^2y = f_{11}(dx_{11} + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}{f_{11}}(dx_2 + \frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}dx_3)^2 + \\ + \frac{f_{11}f_{22}f_{33} - f_{11}f_{23}^{\;2} - f_{22}f_{13}^{\;2} - f_{33}f_{12}^{\;2} + 2f_{12}f_{13}f_{23}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\;2}}dx_3^{\;2}. \qquad (18)$$

Kvadratna forma (18) napisana je u prikladnom obliku koji nam omogućuje da lako odredimo njezin predznak na osnovi predznaka njezinih koeficijenata. Očito je da nijedan od kvadriranih članova na desnoj strani jednakosti (18) nije manji od nule i da je barem jedan veći od nule kada je barem jedan između diferencijala dx_1, dx_2 i dx_3 različit od nule. Stoga kvadratna forma (18) poprima negativne vrijednosti ako i samo ako su njezini koeficijenti u (18) negativni za sve kombinacije vrijednosti neovisnih varijabli, dx_1, dx_2 i dx_3, osim za $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$. Iz navedenoga proizlazi da je nuždan i dovoljan uvjet da kvadratna forma (18) bude negativno definitna, $d^2y < 0$:

$$f_{11} < 0\,, \qquad (19\text{ a})$$

$$\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^{\ 2}}{f_{11}}<0, \tag{19 b}$$

$$\frac{f_{11}f_{22}f_{33}-f_{11}f_{23}^{\ 2}-f_{22}f_{13}^{\ 2}-f_{33}f_{12}^{\ 2}+2f_{12}f_{13}f_{23}}{f_{11}f_{22}-f_{12}^{\ 2}}<0, \tag{19 c}$$

odnosno da budu ispunjene sljedeće nejednakosti

$$f_{11}<0, \tag{20 a}$$

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^{\ 2}>0, \tag{20 b}$$

$$f_{11}f_{22}f_{33}-f_{11}f_{23}^{\ 2}-f_{22}f_{13}^{\ 2}-f_{33}f_{12}^{\ 2}+2f_{12}f_{13}f_{23}<0. \tag{20 c}$$

Može se, dakle, reći da će nuždan i dovoljan uvjet da kvadratna forma (18) bude negativno definitna, $d^2y < 0$, biti ispunjen onda kada brojnici koeficijenata kvadratne forme (18) mijenjaju predznak, s tim da prvi koeficijent mora biti strogo manji od nule, $f_{11} < 0$. Kvadratna forma (18) pozitivno je definitna, $d^2y > 0$, ako i samo ako poprima pozitivne vrijednosti za sve kombinacije vrijednosti neovisnih varijabli, dx_1, dx_2 i dx_3, osim za $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$. Taj je zahtjev ispunjen onda i samo onda kada vrijede sljedeće nejednakosti

$$f_{11}>0, \tag{21 a}$$

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^{\ 2}>0, \tag{21 b}$$

$$f_{11}f_{22}f_{33}-f_{11}f_{23}^{\ 2}-f_{22}f_{13}^{\ 2}-f_{33}f_{12}^{\ 2}+2f_{12}f_{13}f_{23}>0, \tag{21 c}$$

odnosno onda i samo onda kada su vrijednosti brojnika koeficijenata kvadratne forme (18) pozitivne. To je nuždan i dovoljan uvjet za pozitivnu definitnost kvadratne forme (18).

Kad iskoristimo Youngov teorem, $f_{ij} = f_{ji}$, kvadratnu formu (16) možemo izraziti matričnim zapisom

$$d^2y = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

u kojem je
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Hesseova matrica koeficijenata kvadratne forme. Pogledajmo sada vrijednosti vodećih glavnih minora. One su

$$|\mathbf{H}_1| = |f_{11}| = f_{11}, \qquad (24\text{ a})$$

$$|\mathbf{H}_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^{\ 2}, \qquad (24\text{ b})$$

$$|\mathbf{H}_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22}f_{33} - f_{11}f_{23}^{\ 2} - f_{22}f_{13}^{\ 2} - f_{33}f_{12}^{\ 2} + 2f_{12}f_{13}f_{23}. \quad (24\text{ c})$$

Vidimo da vrijednosti vodećih glavnih minora Hesseove matrice odgovaraju brojnicima koeficijenata kvadratne forme na predznake kojih vrijednosti postavljamo zahtjeve kada hoćemo da kvadratna forma, d^2y, bude negativno ili pozitivno definitna. Očito je da kvadratnu formu (18) sada možemo napisati u obliku

$$d^2y = |\mathbf{H}_1|(dx_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}dx_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}dx_3)^2 + \frac{|\mathbf{H}_2|}{|\mathbf{H}_1|}(dx_2 + \frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^{\ 2}}dx_3)^2 + \frac{|\mathbf{H}_3|}{|\mathbf{H}_2|}dx_3^{\ 2}. \quad (25)$$

Nuždan je i dovoljan uvjet da kvadratna forma bude negativno definitna, $d^2y < 0$,

$$|\mathbf{H}_1| < 0 \quad , \tag{26 a}$$

$$|\mathbf{H}_2| > 0 \quad , \tag{26 b}$$

$$|\mathbf{H}_3| < 0 \quad , \tag{26 c}$$

a nuždan i dovoljan uvjet da kvadratna forma bude pozitivno definitna, $\mathrm{d}^2\mathrm{y} > 0$,

$$|\mathbf{H}_1| > 0 \quad , \tag{27 a}$$

$$|\mathbf{H}_2| > 0 \quad , \tag{27 b}$$

$$|\mathbf{H}_3| > 0 \quad . \tag{27 c}$$

Nalaz za funkciju koja ima tri neovisne varijable možemo poopćiti na funkciju koja ima n neovisnih varijabli. Ako je $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija i ako vrijednosti minora, $|\mathbf{H}_i|$, njezine Hesseove matrice, **H**, mijenjaju predznak u skladu s

$$(-1)^i |\mathbf{H}_i| > 0 \quad , i = 1, 2, \ldots , n , \tag{28}$$

tada je Hesseova matrica, pa stoga i kvadratna forma negativno definitna, $d^2y < 0$, a ako je vrijednost svakog minora veća od nule, onda je Hesseova matrica i, stoga, kvadratna forma pozitivno definitna, $d^2y > 0$. Taj nalaz možemo iskoristiti pri ispitivanju stroge konkavnosti i stroge konveksnosti. Prisjetimo se, dva je puta neprekidno diferencijabilna funkcija $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definirana na otvorenoj konveksnoj domeni $D \subset \mathrm{R}^n$ strogo konkavna u vrlo maloj okolini točke $a \in \mathbf{D}$, ako je Hesseova matrica u $x = a$ negativno definitna ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma u $x = a$ negativno definitna, $d^2y < 0$, a strogo konveksna u vrlo maloj okolini točke $a \in D$, ako je Hesseova matrica u $x = a$ pozitivno definitna ili, ekvivalentno, ako je kvadratna forma u $x = a$ pozitivno definitna, $d^2y > 0$. Ako je Hesseova matrica negativno definitna za svako $x \in D$, tada je funkcija globalno strogo konkavna, odnosno strogo konkavna u neposrednoj blizini bilo koje točke $x \in D$, a ako je Hesseova matrica pozitivno definitna za svako $x \in D$, tada je funkcija globalno strogo konveksna, odnosno strogo konveksna u neposrednoj blizini bilo koje točke $x \in D$.

Određivanje konkavnosti i konveksnosti semidefinitnošću kvadratne forme

Možda je na ovome mjestu prikladno izreći još nešto što se odnosi na konkavne i konveksne funkcije. Naime, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definirana na otvorenoj konveksnoj domeni $D \subset \mathrm{R}^n$ konkavna je u vrlo maloj okolini točke $\mathbf{a} \in \mathrm{D}$, ako je i samo ako je za sve vrijednosti neovisnih varijabli iz te okoline, Hesseova matrica negativno semidefinitna ili, ekvivalentno, ako je i samo ako je kvadratna forma, kako sada zamišljamo diferencijal drugoga reda, negativno semidefinitna, $d^2y \leq 0$, a konveksna u vrlo maloj okolini točke $\mathbf{a} \in \mathrm{D}$, ako je i samo ako je za sve vrijednosti neovisnih varijabli iz te okoline, Hesseova matrica pozitivno semidefinitna ili, ekvivalentno, ako je i samo ako je kvadratna forma, kako sada zamišljamo diferencijal drugoga reda, pozitivno semidefinitna, $d^2y \geq 0$. Ako je i samo ako je Hesseova matrica negativno semidefinitna za svaki $\mathbf{x} \in \mathrm{D}$, ili ekvivalentno, ako je i samo ako je kvadratna forma negativno semidefinitna za svaki $\mathbf{x} \in \mathrm{D}$, $d^2y \leq 0$, tada je funkcija globalno konkavna, odnosno konkavna u neposrednoj blizini bilo koje točke $\mathbf{x}$, a ako je i samo ako je Hesseova matrica pozitivno semidefinitna za svaki $\mathbf{x} \in \mathrm{D}$, ili ekvivalentno, ako je i samo ako je kvadratna forma pozitivno semidefinitna za svaki $\mathbf{x} \in \mathrm{D}$, $d^2y \geq 0$, tada je funkcija globalno konveksna, odnosno konveksna u neposrednoj blizini bilo koje točke $\mathbf{x}$.

Riječ ″semidefinitna″ u ovom kontekstu označuje, kao što je već navedeno, mogućnost izražavanja predznaka kvadratne forme u obliku blage nejednakosti. Ponovimo, ako kvadratna forma poprima vrijednosti manje od nule ili jednake nuli, tada kažemo da je ona negativno semidefinitna, $d^2y \leq 0$, a ako poprima vrijednosti koje su veće od nule ili jednake nuli, tada kažemo da je ona pozitivno semidefinitna, $d^2y \geq 0$. Ako su, na primjer, predznaci vodećih glavnih minora takvi da je Hesseova matrica negativno definitna, tada $f_{11} < 0$ i $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ imaju za posljedicu $f_{22} < 0$. Kada bi poredak varijabli bio dx_1, dx_3, dx_2, onda bi $f_{11} < 0$ i $f_{11}f_{33} - f_{13}^2 > 0$ imali za posljedicu $f_{33} < 0$ i tako dalje. U tom se slučaju općenito može reći da vrijednost glavnoga minora bilo kojega reda ima predznak jednak predznaku vodećeg glavnoga minora odgovarajućega reda. Stoga je u definitnosti dovoljno da vrijednosti vodećih glavnih minora imaju zahtijevane stroge predznake. No, kada se radi o semidefinitnosti, tada moramo provjeriti predznake svih glavnih minora. Ilustrirajmo ovu tvrdnju jednim primjerom.

Neka je zadana funkcija

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} - x_3^2$$

Lako je uvjeriti se da su parcijalne derivacije drugoga reda funkcije

$$\begin{aligned} &f_{11} = -1, \quad f_{12} = 1, \quad f_{13} = 0, \\ &f_{21} = 1, \quad f_{22} = -1, \quad f_{23} = 0, \\ &f_{31} = 0, \quad f_{32} = 0, \quad f_{33} = -2, \end{aligned}$$

i da je totalni diferencijal drugoga reda u matričnom zapisu

$$d^2y = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} .$$

Ako sada totalni diferencijal drugoga reda, d^2y, promatramo kao kvadratnu formu u varijablama dx_1, dx_2 i dx_3, onda možemo utvrditi je li zadana funkcija konkavna ili konveksna ili ni konkavna ni konveksna. Iz Hesseove matrice proizlazi da su vrijednosti vodećih glavnih minora

$$|\mathbf{H}_1^1| = |-1| = -1 < 0 \ , \ |\mathbf{H}_2^1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ , \ |\mathbf{H}_3^1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Iz navedenih se rezultata ne može zaključivati o definitnosti kvadratne forme. Da bismo to mogli, moramo provjeriti predznake vrijednosti svih preostalih glavnih minora. Nastavljajući provjeru nalazimo da je

$$|\mathbf{H}_1^2| = |-1| = -1 < 0 \ , \ |\mathbf{H}_1^3| = |-2| = -2 < 0 \ ,$$

$$|\mathbf{H}_2^2| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \ , \ |\mathbf{H}_2^3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \ .$$

Svi su glavni minori prvoga reda manji od nule. Jedan je glavni minor drugoga reda jednak nuli i dva su veća od nule. Determinanta matrice jednaka je nuli. Stoga možemo zaključiti da je Hesseova matrica negativno semidefinitna. S time u skladu, zadana je funkcija globalno konkavna.

Da ne bismo kojim slučajem pogrešno pomislili kako je, pri ispitivanju konkavnosti, odnosno semidefinitnosti kvadratne forme, pozornost dovoljno usmjeriti na predznake vodećih glavnih minora, upozorava nas primjer funkcije $y = f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2^2}{2}$, koja uistinu nije konkavna.

Zašto se ispituju predznaci svih glavnih minora

Postavlja se pitanje, kada ispitujemo je li funkcija u nekoj točki strogo konkavna ili strogo konveksna, zašto moramo ispitati predznake svih glavnih minora Hesseove matrice u toj točki? Odgovor je na to pitanje važan da bismo dobili jasnu predodžbu kako izgleda graf funkcije u vrlo maloj okolini te izabrane točke. Funkcija jedne neovisne varijable, $f(x)$, strogo je konkavna u vrlo maloj okolini neke točke ako nagib grafa funkcije idući s lijeva na desno u jedinom mogućem smjeru, određenom bilo kojim netrivijalnim prirastom jedine neovisne varijable, $dx \neq 0$, diferencijalno opada u izabranoj točki, $f_{xx} < 0$, odnosno ako je $d^2y = f_{xx}dx^2 < 0$. To znači da graf funkcije u vrlo maloj okolini točke grafa leži ispod tangente u toj točki. U slučaju funkcije dviju neovisnih varijabli, $y = f(x_1, x_2)$, točkom je grafa funkcije, $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]$, za koju moramo ispitati je li oblik grafa funkcije u vrlo maloj okolini te točke konkavan ili konveksan, moguće proći idući u bilo kojem od smjerova određenih vektorima prirasta neovisnih varijabli, (dx_1, dx_2). Naravno, da bismo se stvarno pomaknuli iz izabrane točke grafa, ne smiju biti prirasti obiju neovisnih varijabli istovremeno jednaki nuli. No, ako je $dx_2 = 0$, putovali bismo u smjeru osi x_1 krivuljom $y = f(x_1, \bar{x}_2)$, koja se dobiva presiječemo li graf funkcije ravninom paralelnom s ravninom x_1Oy, koja prolazi kroz izabranu točku, $x_2 = \bar{x}_2$. Ako je u toj točki $f_{11} < 0$, tada je ta krivulja strogo konkavna u vrlo maloj okolini izabrane točke i smjer stroge konkavnosti odgovara smjeru osi x_1. Isto bismo tako graf funkcije mogli presjeći ravninom paralelnom s ravninom x_2Oy, koja također prolazi kroz izabranu točku. Tada je $dx_1 = 0$, pa bismo putovali u smjeru osi x_2 krivuljom $y = f(\bar{x}_1, x_2)$. Vrijednost bi $f_{22} < 0$ u izabranoj točki pokazivala da je ta krivulja strogo konkavna u vrlo maloj okolini izabrane točke i smjer stroge konkavnosti odgovara smjeru osi x_2.

Očito je da bi nam na opisani način dobijene vrijednosti vlastitih parcijalnih derivacija drugoga reda, f_{11} i f_{22}, koje su podjedno i vrijednosti glavnih minora prvoga reda Hesseove matrice, jamčile da su u vrlo maloj okolini izabrane točke strogo konkavne samo krivulje $y = f(x_1, \bar{x}_2)$ i $y = f(\bar{x}_1, x_2)$. One nam ne bi jamčile da je u vrlo maloj okolini izabrane točke strogo konkavnog oblika i sam graf funkcije. Stoga bismo morali ispitati jesu li u vrlo maloj okolini izabrane točke strogo konkavne i sve krivulje koje se dobivaju putujući smjerovima (dx_1, dx_2), $dx_1 \neq 0$, $dx_2 \neq 0$, iz izabrane točke, odnosno presjecima grafa funkcije i svake pojedine ravnine okomite na ravninu x_1Ox_2 i koja sadrži izabranu točku, $-dx_2(x_1-\bar{x}_1)+dx_1(x_2-\bar{x}_2)=0$, a koja, dakle, nije paralelna ni sa jednom od ravnina x_1Oy, x_2Oy. Odgovor bi nam na to pitanje dao predznak vrijednosti glavnog minora drugoga reda, koji je u slučaju funkcije dviju neovisnih varijabli podjedno i determinanta Hesseove matrice. Ako bi njegova vrijednost u izabranoj točki bila veća od nule, $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$, tada bismo zaključili da je funkcija $y=f(x_1, x_2)$ strogo konkavna u vrlo maloj okolini izabrane točke. Za funkciju koja ima više neovisnih varijabli stroga konkavnost u dvodimenzionalnom potprostoru, koji određuju prirasti nekih dviju neovisnih varijabli, nije implicirana predznakom vrijednosti minora višega reda i ne implicira strogu konkavnost u trodimenzionalnim potprostorima, niti strogu konkavnost u višedimenzionalnim potprostorima. Stroga je konkavnost u potprostorima manjih dimenzija samo nuždan uvjet za strogu konkavnost u potprostorima većih dimenzija. Zato bismo morali ispitati jesu li u vrlo maloj okolini izabrane točke strogo konkavne ne samo dvodimenzionalne plohe, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdje su sve neovisne varijable, osim dviju, fiksne, određene, dakle, izabranom točkom i smjerovima $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, gdje su prirasti fiksnih varijabli jednaki nulama, već i sve dvodimenzionalne plohe određene izabranom točkom i smjerovima $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, gdje su prirasti svih neovisnih varijabli, osim neke tri, jednaki nula. To bismo učinili ispitivanjem predznaka vrijednosti glavnih minora trećega reda. Opisani bismo proces ispitivanja predznaka morali provesti za sve glavne minore svih redova, uključujući i determinantu Hesseove matrice. Tek onda kada bi vrijednosti svih glavnih minora imale zahtijevane predznake, mogli bismo zaključiti je li funkcija strogo konkavna ili strogo konveksna u vrlo maloj okolini izabrane točke.

Maksimalna i minimalna vrijednost funkcije

Sada kada znamo naći kritične vrijednosti neovisnih varijabli, ili, kako se to također kaže, kritičnu točku, $\mathbf{x}^*$, i kada znamo utvrditi je li graf funkcije strogo konkavan ili strogo konveksan u vrlo maloj okolini stacionarne točke $[\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)]$, lako je reći izražava li stacionarna vrijednost funkcije, $f(\mathbf{x}^*)$, lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije. Drugačije rečeno, sada kada znamo naći nužne uvjete prvoga reda, $dy=0$ za proizvoljne vrijednosti dx_i između kojih je barem jedna različita od nule, i kada, promatrajući totalni diferencijal drugoga reda kao kvadratnu formu u varijablama dx_i, $i=1, 2, \dots, n$, znamo odrediti je li Hesseova matrica, odnosno matrica drugih parcijalnih derivacija u kritičnoj točki, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$, negativno ili pozitivno definitna, lako možemo saznati izražava li stacionarna vrijednost funkcije, $f(\mathbf{x}^*)$, njezin lokalni maksimum ili njezin lokalni minimum, ili ni prvo ni drugo. Primijetimo još da Hesseovu matricu možemo jasnije zapisati

u obliku
$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}^*) & f_{12}(\mathbf{x}^*) & \dots & f_{1n}(\mathbf{x}^*) \\ f_{12}(\mathbf{x}^*) & f_{22}(\mathbf{x}^*) & \dots & f_{2n}(\mathbf{x}^*) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_{1n}(\mathbf{x}^*) & f_{2n}(\mathbf{x}^*) & \dots & f_{nn}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \tag{29}$$

Konačno možemo precizno izreći teorem o dovoljnim uvjetima drugoga reda za lokalnu maksimalnu i lokalnu minimalnu vrijednost funkcije.

Teorem: Pretpostavimo da dva puta diferencijabilna funkcija $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definirana na otvorenom skupu $D \subset R^n$ ima kritičnu točku $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ u kojoj je stacionarna vrijednost funkcije $f(\mathbf{x}^*)$.

a) Ako je tada Hesseova matrica, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$, negativno definitna, ispunjen je dovoljan uvjet drugoga reda za lokalni maksimum i stacionarna je vrijednost funkcije, $f(\mathbf{x}^*)$, lokalna maksimalna vrijednost funkcije.
b) Ako je tada Hesseova matrica, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$, pozitivno definitna, ispunjen je dovoljan uvjet drugoga reda za lokalni minimum i stacionarna je vrijednost funkcije, $f(\mathbf{x}^*)$, lokalna minimalna vrijednost funkcije.
c) Ako je tada Hesseova matrica, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$, nedefinitna, kritična vrijednost funkcije nije ni lokalna maksimalna vrijednost funkcije, ni lokalna minimalna vrijednost funkcije.

Maksimizacija profita

Ekonomski profit

Opisani postupak utvrđivanja prirode stacionarne točke možemo lako ilustrirati primjerom kako poduzeće maksimira ekonomski profit u uvjetima savršene konkurencije. Pritom ekonomski profit definiramo kao razliku između ukupnoga prihoda i ukupnih ekonomskih troškova proizvodnje. Postupak maksimizacije ekonomskog profita izvodimo na dva načina: izborom kritične količine proizvodnje koja maksimira ekonomski profit i izborom kritičnih količina faktora proizvodnje koje maksimiraju ekonomski profit.

Prvi način polazi od stajališta da se najprije mora utvrditi funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova koja za bilo koju zadanu količinu proizvodnje izražava minimalne ekonomske troškove te zadane količine proizvodnje i potom naći kritična količina proizvodnje, y^*, koja maksimira razliku između funkcije ukupnoga prihoda i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova proizvodnje. Prema ovom je pristupu varijabla o kojoj se odlučuje ili endogena varijabla količina proizvodnje, a egzogena je varijabla cijena proizvoda. Funkcija ekonomskog profita koju maksimiramo glasi

$$\Pi(y) = py - C(y) \ , \tag{1}$$

gdje je $C(y)$ funkcija koja izražava ukupne minimalne ekonomske troškove za bilo koju zadanu razinu proizvodnje y. Iako taj način nije prikladan za sveobuhvatnu ilustraciju određivanja prirode stacionarne točke funkcije profita, njega ćemo prikazati prvo, jer nam tako dobijeni rezultati pomažu da bolje shvatimo ekonomski smisao dovoljnih uvjeta drugoga reda za maksimizaciju profita u skladu s pristupom koji je usmjeren na izbor kritične kombinacije rada i kapitala, (L^*, K^*), koja maksimira ekonomski profit.

Drugi način polazi od stajališta da funkcija proizvodnje izražava maksimalnu količinu proizvodnje za bilo koju zadanu kombinaciju faktora proizvodnje. Drugačije rečeno, drugi pristup polazi od stajališta da različite kombinacije faktora proizvodnje na tehnički efikasan način određuju različite količine proizvodnje. Tome valja dodati da tehničku efikasnost uvjetuju i pozitivne cijene faktora proizvodnje. Stoga su varijable o kojima se odlučuje, odnosno endogene varijable, količina rada i količina kapitala. Egzogene varijable cijena su rada, w, cijena uzimanja kapitala u zakup, r, i cijena proizvoda, p. Funkcija ekonomskog profita koju sada maksimiramo glasi

$$\Pi(L, K) = pf(L, K) - (wL + rK) \ . \tag{2}$$

Takav je pristup koristan u analizi potražnje poduzeća za faktorima proizvodnje.

Sažeto, prema prvome pristupu najprije minimiramo ekonomske troškove za bilo koju količinu proizvodnje, pa potom utvrđujemo kritičnu količinu proizvodnje, y^*, koja maksimira ekonomski profit, a prema drugom pristupu prvo maksimiramo proizvodnju za bilo koju kombinaciju faktora proizvodnje, pa potom utvrđujemo kritične količine faktora proizvodnje, (L^*, K^*), koje maksimiraju ekonomski profit.

Premda je intuitivno jasno da dva opisana pristupa daju jednak ekonomski profit, ovdje ćemo dokazati opravdanost te intuicije. Pretpostavimo da kritična količina proizvodnje y^* maksimira funkciju ekonomskog profita (1) i da je najjeftinija kombinacija rada i kapitala kojom se proizvodi kritična količina proizvodnje $(\hat{L},\hat{K})$. U tom slučaju odnos između kritične količine proizvodnje, y^*, i najjeftinije kombinacije faktora proizvodnje, $(\hat{L},\hat{K})$, možemo izraziti zapisom

$$y^* = f(\hat{L}, \hat{K}) \,. \tag{3}$$

Istodobno minimalni ukupni ekonomski troškovi kritične količine proizvodnje iznose

$$C(w, r, y^*) = w\hat{L} + r\hat{K} \,. \tag{4}$$

Sa druge strane, pretpostavimo da kritične količine rada i kapitala, (L^*, K^*), maksimiraju funkciju ekonomskog profita (2) i da je maksimalna količina proizvodnje koju ta kombinacija faktora proizvodi $\hat{y}$. U tom slučaju, odnos između maksimalne količine proizvodnje, $\hat{y}$, i kritičnih količina faktora proizvodnje možemo izraziti zapisom

$$\hat{y} = f(L^*, K^*) \,. \tag{5}$$

Istodobno, minimalni ukupni ekonomski troškovi kritične proizvedene količine, $\hat{y}$, iznose

$$C(w, r, \hat{y}) = wL^* + rK^* \,. \tag{6}$$

Kada jednakost (6) ne bi bila zadovoljena, onda bi to proturječilo pretpostavci da kombinacija kritičnih količina faktora proizvodnje, (L^*, K^*), maksimira ekonomski profit.

Potražimo sada odnos između maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$, i maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$. Ako je kritična količina proizvodnje koja maksimira ekonomski profit, y*, tada nijedna druga količina proizvodnje, pa stoga ni količina proizvodnje $\hat{y}$, ne može dati veći ekonomski profit od kritične količine proizvodnje y^*. U skladu s navedenim možemo pisati

$$\Pi(y^*) = py^* - C(w, r, y^*)$$

$$\Pi(y^*) \geq p\hat{y} - C(w, r, \hat{y})$$

$$\Pi(y^*) \geq pf(L^*, K^*) - (wL^* + rK^*)$$

$$\Pi(y^*) \geq \Pi(L^*, K^*) \quad . \tag{7}$$

Nejednakost (7) kazuje nam da je maksimalan ekonomski profit ostvaren kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$, jednak ili veći od maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$.

Pođimo sada sa druge strane i potražimo odnos između maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$, i maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$. Ako kritična kombinacija faktora proizvodnje, (L^*, K^*), maksimira ekonomski profit, onda nijedna druga kombinacija faktora proizvodnje, pa stoga ni kombinacija faktora proizvodnje $(\hat{L}, \hat{K})$, ne može dati veći ekonomski profit od kritičnih količina faktora proizvodnje, (L^*, K^*). U skladu s rečenim možemo pisati

$$\Pi(L^*, K^*) = pf(L^*, K^*) - (wL^* + rK^*)$$

$$\Pi(L^*, K^*) \geq pf(\hat{L}, \hat{K}) - (w\hat{L} + r\hat{K})$$

$$\Pi(L^*, K^*) \geq py^* - C(w, r, y^*)$$

$$\Pi(L^*, K^*) \geq \Pi(y^*) \quad . \tag{8}$$

Iz nejednakosti (8) proizlazi da je maksimalan ekonomski profit koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$, jednak ili veći od maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$.

Iz nejednakosti (7) i nejednakosti (8) jednostavno slijedi

$$\Pi(y^*) \geq \Pi(L^*, K^*) \geq \Pi(y^*). \tag{9}$$

Budući da maksimalni ekonomski profit koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$, ne može istodobno biti veći i manji od maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\Pi(L^*, K^*)$, i da maksimalni ekonomski profit koji se ostvaruje kritičnim količinama faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$, ne može istodobno biti manji i veći od maksimalnog ekonomskog profita koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$, zaključujemo da maksimalni ekonomski profit koji se ostvaruje kritičnom količinom proizvodnje, $\prod(y^*)$, mora biti jednak maksimalnom ekonomskom profitu koji se ostvaruje kritičnom količinom faktora proizvodnje, $\prod(L^*, K^*)$. Stoga konačno možemo pisati

$$\Pi(y^*) = \Pi(L^*, K^*) \quad . \tag{10}$$

Maksimizacija profita kritičnom količinom proizvodnje

Pođimo sada od stajališta da poduzeće proizvodi i prodaje određenu količinu proizvoda, y, po jediničnoj tržišnoj cijeni, p, i da tako ostvaruje ukupan prihod, $R(y)$. Stoga je

$$R(y) = py. \tag{1}$$

Budući da je tržište proizvoda savršeno, cijena, p, granični je prihod poduzeća,

$$\frac{dR}{dy} = p. \tag{2}$$

Poduzeće za svaku dodatnu jedinicu prodaje ostvaruje dodatni prihod, p.

Ako ukupne ekonomske troškove proizvodnje označimo sa $C(y)$ i ekonomski profit sa $\Pi(y)$, možemo pisati

$$\Pi(y) = R(y) - C(y). \tag{3}$$

Nuždan uvjet prvoga reda za izbor kritične količine proizvodnje koja maksimira ekonomski profit, odnosno za izbor količine proizvodnje za koju je vrijednost funkcije profita stacionarna, jeste

$$d\Pi = \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dC}{dy}\right)dy = 0. \tag{4}$$

Očito je da će za $dy \neq 0$ jednakost $d\Pi = 0$ vrijediti samo onda kada je

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dC}{dy}. \tag{5}$$

Iz (5) proizlazi da poduzeće mora, ako mu je cilj maksimirati ekonomski profit, proizvoditi i prodavati onu količinu proizvodnje pri kojoj je granični prihod jednak graničnom trošku, odnosno pri kojoj je nagib krivulje ukupnoga prihoda jednak nagibu krivulje ukupnih ekonomskih troškova. Dok je god granični prihod, ili u našem slučaju cijena proizvoda, veći od graničnoga troška, poduzeće može povećavati ekonomski profit, povećavajući proizvodnju sve dok se granični prihod ne izjednači s graničnim troškom. Ako je granični prihod manji od graničnoga troška, onda poduzeće može povećavati ekonomski profit smanjujući količinu proizvodnje sve dok se granični prihod ne izjednači s graničnim troškom. Ako uzmemo u obzir da je u uvjetima savršene konkurencije cijena proizvoda, p, koju određuje sjecište krivulje agregatne ponude i agregatne potražnje, poduzeću zadana i da je ta cijena granični prihod poduzeća, poduzeće jedino može prilagođivati količinu proizvodnje toj cijeni i odlučiti da proizvodi kritičnu količinu koja maksimira ekonomski profit poduzeća. Navedena tvrdnja postaje još jasnija kada u (5) uvrstimo (2) i nuždan uvjet prvoga reda za maksimizaciju profita izrazimo zapisom

$$p = \frac{dC}{dy}. \tag{6}$$

U našoj analizi pretpostavljamo da graf funkcije dugoročnih prosječnih troškova poduzeća ima uobičajeni oblik slova U i da se u skladu s time krivulja potražnje za proizvodom poduzeća, p, ako se uopće siječe, siječe s krivuljom graničnih troškova proizvodnje jednom ili dva puta i da samo jedna između dviju količina proizvodnje koje odgovaraju tim sjecištima maksimira profit. Poduzeće bi u dugom roku prestalo poslovati kad mu ta kritična količina proizvodnje, $y*$, ne bi donosila nenegativan ekonomski profit. Stoga moramo uvesti dodatno ograničenje

$$py^* - C(y^*) \geq 0 \tag{7}$$

iz kojeg proizlazi

$$p \geq \frac{C(y^*)}{y^*}. \tag{8}$$

Nejednakost (8) jasno pokazuje da poduzeće u uvjetima savršene konkurencije u dugom roku može poslovati i ostvarivati nenegativni ekonomski profit samo onda kada je cijena proizvoda jednaka ili veća od dugoročnog prosječnog troška i da njegova kritična količina ponude proizvoda mora biti jednaka ili veća od količine pri kojoj je prosječan trošak minimalan. U nastavku ćemo podrobnije dokazati navedene tvrdnje.

Sada ćemo radi olakšanja dalje analize uvesti pojmove diferencijabilnog rasta i diferencijabilnog pada funkcije. Reći ćemo da funkcija u nekoj točki diferencijabilno opada kada je njezina derivacija u toj točki manja od nule i da funkcija u nekoj točki diferencijabilno raste kada je njezina derivacija u toj točki veća od nule. Povrh toga, lako možemo dokazati da je granična vrijednost funkcije manja od prosječne vrijednosti funkcije kada prosječna vrijednost funkcije diferencijabilno opada i da je granična vrijednost funkcije veća od prosječne vrijednosti funkcije kada prosječna vrijednost funkcije diferencijabilno raste i da je granična vrijednost funkcije jednaka prosječnoj vrijednosti funkcije kada prosječna vrijednost funkcije dosegne stacionarnu vrijednost. Tu ćemo tvrdnju dokazati konkretizirajući posve općenit odnos prosječnih i graničnih troškova:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{C(y)}{y}\right] \lesseqgtr 0$$

$$\frac{\frac{dC}{dy}y - C(y)}{y^2} \lesseqgtr 0$$

i otuda za $y > 0$ proizlazi

$$\frac{dC}{dy} \lesseqgtr \frac{C(y)}{y}. \tag{9}$$

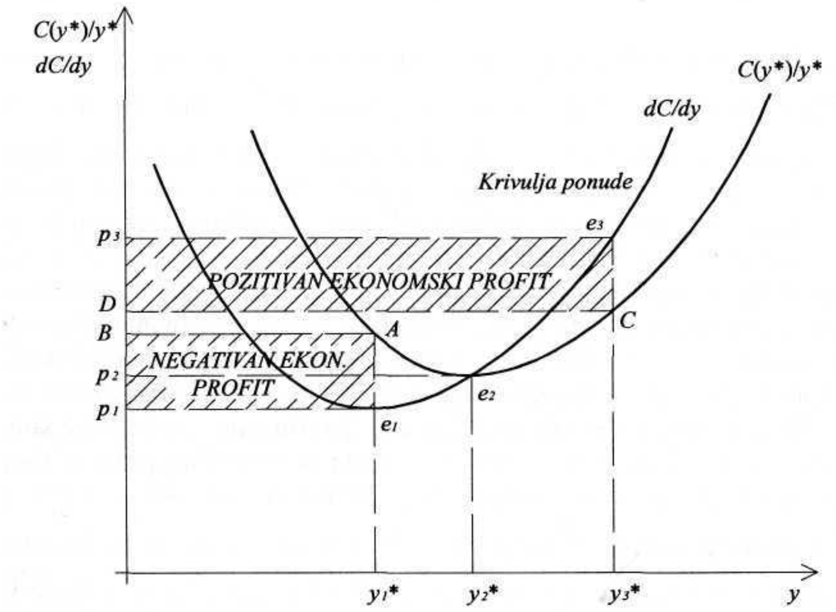
Rezultati dokaza pokazuju da svakom sjecištu krivulje potražnje za proizvodom poduzeća, p, s krivuljom graničnih troškova poduzeća, $\frac{dC}{dy}$, na intervalu na kojem krivulja prosječnih troškova diferencijabilno opada, pripada količina proizvodnje koja poduzeću donosi negativan ekonomski profit. Na tom je intervalu prosječan trošak veći od cijene, pa su stoga i ekonomski profit po jedinici i ukupni ekonomski profit negativni. Tek kada se tržišna cijena proizvoda izjednači s minimalnim dugoročnim prosječnim troškom, količina proizvodnje koja pripada tome sjecištu daje upravo onaj ukupan prihod koji je jednak ukupnim troškovima proizvodnje. To je dobro poznata točka pokrića. Tržišna cijena koja je jednaka minimalnom prosječnom trošku najniža je cijena uz koju poduzeće u dugom roku može poslovati, a količina proizvodnje koja pripada tome sjecištu najmanja kritična količina proizvodnje koju poduzeće može ponuditi. Sve kritične količine proizvodnje koje pripadaju sjecištima krivulja potražnje za proizvodom poduzeća, p, s krivuljom graničnog troška poduzeća, $\frac{dC}{dy}$, nakon minimuma dugoročnog prosječnog troška donose poduzeću pozitivan ekonomski profit. Krivulja prosječnog troška sada diferencijabilno raste i stoga se stalno nalazi ispod krivulje graničnog troška s kojom se sječe zadana krivulja potražnje za proizvodom poduzeća, p. Ekonomski profit po jedinici proizvoda i ukupan ekonomski profit veći su od nule. Sada, na osnovi prethodnih nalaza pouzdano možemo zaključiti da je dugoročna inverzna funkcija ponude poduzeća dana zapisom (6), i to za količine proizvodnje koje su jednake ili veće od količine za koju su dugoročni prosječni troškovi minimalni. Ona pokazuje kolike bi cijene na tržištu proizvoda morale biti da bi poduzeće ponudilo te kritične količine proizvodnje. Za te količine iz (6) možemo izvesti dugoročnu funkciju ponude poduzeća koju ovdje izražavamo zapisom

$$y = y^*(p)\,. \tag{10}$$

Čitavu dosadašnju analizu možemo sažeto slikovno opisati i na taj način upotpuniti izvođenje maksimizacije ekonomskog profita u dugom roku.

Slika 3.

DUGOROČNA KRIVULJA PONUDE I MAKSIMIZACIJE EKONOMSKOG PROFITA



Cijene proizvoda formiraju se na konkurencijskom tržištu i te su cijene krivulje potražnje za proizvodom poduzeća. Očito je da su u intervalu na kojem funkcija prosječnih troškova diferencijabilno opada sjecišta tih krivulja s funkcijom graničnih troškova uvijek ispod funkcije prosječnih troškova i da je s tim u skladu ekonomski profit poduzeća negativan. Kada bi, na primjer, krivulja potražnje bila $p = p_1$, ona bi sjekla krivulju graničnih troškova u njezinu minimumu. Kritična bi količina proizvodnje u tom slučaju bila y_1^*, a apsolutni bi iznos negativnog ekonomskog profita predočavala površina p_1e_1AB. Poduzeće bi izašlo iz industrije. Sjecište e_2 predočava točku dugoročne ravnoteže poduzeća u uvjetima savršene konkurencije. Ekonomski je profit jednak nuli, a odgovarajuća kritična količina proizvodnje, y_2*, najmanja količina proizvodnje, koju poduzeće može nuditi u dugom roku. Sjecištima krivulja potražnje, p, s diferencijabilno rastućim dijelom krivulje graničnih troškova koji odgovara diferencijabilno rastućem dijelu krivulje prosječnih troškova pripadaju količine proizvodnje koje poduzeću donose pozitivan ekonomski profit. Tako, na primjer, kritična količina proizvodnje, y_3*, koja pripada sjecištu e_3 u kojem se sječe krivulja potražnje p_3 i krivulja ponude, $\frac{dC}{dy}$, donosi poduzeću pozitivan ekonomski profit predočen površinom p_3e_3CD. Krivulja ponude poduzeća sadrži minimum krivulje prosječnih troškova i dio krivulje graničnih troškova iznad toga minimuma. Dovoljan uvjet drugoga reda za maksimizaciju ekonomskog profita dopušta proizvodnju količina iz intervala (y_1*, y_2*) i s tim u skladu negativan ekonomski profit. Zahtjev da ekonomski profit bude nenegativan isključuje takvu mogućnost.

Zahtjev da ekonomski profit bude nenegativan stroži je od zahtjeva koji nameće dovoljan uvjet drugoga reda za maksimizaciju profita. Bez obzira na to izvest ćemo dovoljan uvjet drugoga reda, ne samo radi toga da bismo utvrdili razliku između ova dva zahtjeva, nego i zbog toga da bismo ilustrirali kako se utvrđuje predznak totalnog diferencijala drugoga reda funkcije ekonomskog profita. Dovoljan uvjet drugoga reda za maksimizaciju ekonomskog profita zahtijeva da totalni diferencijal drugoga reda funkcije ekonomskog profita za kritičnu vrijednost proizvodnje bude negativno definitan, $d^2\prod(y^*) < 0$, odnosno da graf funkcije ekonomskog profita u vrlo maloj okolini stacionarne točke [y*, $\Pi(y^*)$] bude strogo konkavan. U simboličkom zapisu taj zahtjev glasi

$$d^2\Pi(y^*) = [dy]\left[-\frac{d^2C(y^*)}{dy^2}\right][dy] < 0 \,. \tag{11}$$

Sada totalni diferencijal drugoga reda promatramo kao kvadratnu formu u kojoj je neovisna varijabla dy i Hesseova matrica

$$\left[-\frac{d^2C(y^*)}{dy^2}\right]. \tag{12}$$

Očito je Hesseova matrica, pa u skladu s time i kvadratna forma (11), negativno definitna kada funkcija graničnih troškova u kritičnoj točki y* diferencijabilno raste

$$\frac{d^2C(y^*)}{dy^2} > 0 \,. \tag{13}$$

Nejednakost (13) kaže nam da je dovoljan uvjet drugoga reda za maksimizaciju ekonomskog profita ekvivalentan zahtjevu da poduzeće maksimira ekonomski profit onim kritičnim količinama proizvodnje pri kojima funkcija graničnih troškova diferencijabilno raste. Ona ne isključuje količine proizvodnje koje pripadaju sjecištima krivulje potražnje i krivulja graničnih troškova proizvodnje između minimuma prosječnih graničnih troškova i minimuma dugoročnih prosječnih troškova i tako dopušta da ekonomski profit poduzeća bude negativan. Za razliku od toga, zahtjev da ekonomski profit bude nenegativan isključuje mogućnost proizvodnje količina koje pripadaju tim sjecištima.

Maksimizacija profita kritičnim količinama faktora proizvodnje

Kada se maksimira ekonomski profit kritičnom količinom proizvodnje, pretpostavlja se da je već izvedena funkcija ekonomskih troškova koja izražava minimalne ukupne ekonomske troškove za svaku zadanu količinu proizvodnje. Svaki put kada se zada neka količina proizvodnje zna se ekonomski profit koji proizlazi iz te količine proizvodnje, jer je cijena proizvoda konstantna. Profit je jednostavno maksimalna razlika između maksimalnog ukupnog prihoda koji proizlazi iz zadane količine proizvodnje i minimalnih ukupnih ekonomskih troškova zadane količine proizvodnje. Takvih maksimalnih razlika ima beskonačno mnogo, pa zato tražimo onu kritičnu količinu proizvodnje za koju je tako definirana razlika apsolutno maksimalna.

Sada kada želimo maksimirati ekonomski profit kritičnim količinama faktora proizvodnje, polazimo od stajališta da funkcija proizvodnje izražava maksimalnu količinu proizvodnje za svaku zadanu kombinaciju faktora proizvodnje. Stoga se svaki put kada je zadana neka kombinacija faktora proizvodnje zna i maksimalni ukupni prihod koji proizlazi iz te kombinacije faktora proizvodnje, jer je on umnožak konstantne cijene, p, i količine proizvodnje $y = f(L, K)$. Budući da su i cijene faktora proizvodnje u savršenoj konkurenciji pozitivne konstante, relativan se maksimalni ekonomski profit u obliku razlike između bilo kojeg ukupnog prihoda i odgovarajućeg ukupnog ekonomskog troška ostvaruje najjeftinijom kombinacijom faktora proizvodnje koja daje pripadajući ukupan prihod. Takvih relativnih maksimuma ima beskonačno mnogo. Nas, međutim, zanimaju one kritične količine faktora proizvodnje, (L^*, K^*), koje u obliku razlike između maksimalnog ukupnog prihoda i minimalnih ukupnih ekonomskih troškova, bez ograničenja ukupnog prihoda, daju apsolutan maksimalni ekonomski profit.

Funkcija ekonomskog profita, u obliku razlike između ukupnog prihoda i ukupnih ekonomskih troškova, glasi

$$\Pi(y, L, K) = py - wL - rK \quad . \tag{1}$$

U (1), p cijena je proizvoda, y – količina proizvodnje, L – broj radnih sati rada, K – broj radnih sati kapitala i w – cijena rada i r – cijena uzimanja kapitala u zakup. U savršenoj konkurenciji, varijable o kojima se odlučuje jesu y, L i K. To su endogene varijable ili varijable izbora, a p, w i r egzogene su varijable. Tri navedene endogene varijable nisu međusobno neovisne. Tehnički efikasan odnos između količina faktora proizvodnje i odgovarajućih količina proizvodnje opisuje funkcija proizvodnje

$$y = f(L, K)\ . \qquad (2)$$

Stoga funkciju profita (1) sada možemo pisati u obliku

(3)

u kojem su L i K endogene varijable, a p, w i r egzogene varijable. Iz (3) izvodimo uvjet prvoga reda za maksimizaciju profita

$$\Pi(L, K) = pf(L, K) - wL - rK \qquad , \qquad (4)$$

koji je, za $dL \neq 0$ i $dK \neq 0$, ispunjen samo onda kada je

$$pf_L - w = 0 \qquad (5a)$$

$$d\Pi = (pf_L - w)\, dL + (pf_K - r)\, dK = 0$$

$$pf_K - r = 0\ . \qquad (5b)$$

Iz (5a) očito je da poduzeće koje maksimira profit mora upošljavati radnu snagu sve dok vrijednost graničnog proizvoda rada ne postane jednaka nadnici, a iz (5b) slijedi da bi poduzeće moralo uzimati kapital u zakup sve dok se vrijednost graničnog proizvoda kapitala ne izjednači sa cijenom uzimanja kapitala u zakup. Drugim riječima, poduzeće bi moralo za svaku dodatnu jedinicu rada uspoređivati vrijednost graničnog proizvoda rada, pf_L, s jediničnim troškom rada, w, i za svaku dodatnu jedinicu kapitala vrijednost graničnog proizvoda kapitala, pf_K, s jediničnim troškom kapitala, r. Dok je god vrijednost graničnog proizvoda rada, pf_L, veća od jediničnog troška rada, w, granični je doprinos rada profitu poduzeća veći od nule i dok je god vrijednost graničnog proizvoda kapitala, pf_K, veća od graničnog troška kapitala, r, granični je doprinos kapitala profitu poduzeća veći od nule. Zbog toga poduzeće mora uzimati u najam faktore proizvodnje sve dok granični doprinosi faktora profitu poduzeća ne postanu jednaki nuli. Granični doprinosi faktora profitu poduzeća moraju jednom postati jednaki nuli, zato što zakon opadajućih prinosa uzrokuje smanjivanje graničnih proizvoda faktora proizvodnje i, pri konstantnoj cijeni proizvoda, smanjivanje vrijednosti graničnih proizvoda faktora, jedinični su troškovi faktora konstantni. Iz (5a) i (5b) proizlazi da su inverzne funkcije potražnje za faktorima proizvodnje

$$w = pf_L(L, K^*), \tag{6a}$$

$$r = pf_K(L^*, K), \tag{6b}$$

gdje su L^* i K^*, uz pretpostavku da su ispunjeni uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita, količine faktora koje maksimiraju profit poduzeća. Inverzna funkcija potražnje za radom, (6a), pokazuje koliko bi morala iznositi nadnica da bi se tražila zadana količina rada, kada je količina kapitala K^*, a inverzna funkcija potražnje za kapitalom, (6b), koliko bi morala iznositi cijena uzimanja kapitala u zakup da bi se tražila zadana količina kapitala, kada je količina rada L^*. Jednadžbe (5a) i (5b) mogu poprimiti i sljedeće zanimljive oblike

$$f_L = \frac{w}{p}, \tag{7a}$$

$$f_K = \frac{r}{p}, \tag{7b}$$

koji nam pokazuju da poduzeće, kada su zadovoljeni uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita, maksimira profit onda kada je granični proizvod rada jednak realnoj nadnici, w/p, i kada je granični proizvod kapitala jednak realnoj cijeni uzimanja kapitala u zakup, r/p.

Da bismo uspostavili vezu između kritične količine proizvodnje u modelu u kojem je količina proizvodnje varijabla izbora i količine proizvodnje u modelu u kojem su količine faktora proizvodnje varijable izbora, pretpostavljamo da su uvjeti prvoga reda za maksimizaciju profita (5a) i (5b) rješivi. Rješenja sustava (5a) i (5b) izravne su funkcije potražnje ili, kako se to često kaže, funkcije izbora:

$$L^* = L(w, r, p), \tag{8a}$$

$$K^* = K(w, r, p). \tag{8b}$$

Funkcije potražnje za faktorima proizvodnje izražavaju kritične količine faktora proizvodnje kao funkcije egzogenih varijabli *w, r* i *p*.

Prije prijelaza na traženje funkcije ponude proizvoda i indirektne funkcije profita, pogledajmo koje nam ograničenje nameću uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita. Uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita svode se na zahtjev da totalni diferencijal drugoga reda funkcije profita za kritične vrijednosti varijabli izbora, *L** i *K**, bude manji od nule. Stoga možemo pisati

$$d^2\Pi = pf_{LL}\, dL^2 + pf_{LK} dL\, dK + pf_{LK} dL\, dK + pf_{KK}\, dK^2 < 0 \qquad (9)$$

ili u matričnom zapisu

$$d^2\Pi = p\begin{bmatrix} dL & dK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{LK} & f_{KK} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dL \\ dK \end{bmatrix} < 0 \qquad (10)$$

Totalni diferencijal drugoga reda d^2 ∏ sada shvaćamo kao kvadratnu formu u varijablama dL i dK. Hessova je matrica koeficijenata te kvadratne forme

$$\mathbf{H} = p\begin{bmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{LK} & f_{KK} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Dovoljan uvjet drugoga reda, za lokalni maksimum funkcije profita, $d^2 - < 0$, ispunjen je onda kada je Hessova matrica koeficijenata kvadratne forme za kritične vrijednosti varijabli izbora, (L*, K*), negativno definitna. Ta je matrica, i s tim u skladu kvadratna forma, negativno definitna kada su vrijednosti vodećih glavnih minora

$$\mathbf{H}_1 = \left| f_{LL} \right| < 0 \qquad (12)$$

i

$$\mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{LK} & f_{KK} \end{vmatrix} > 0. \qquad (13)$$

Zahtjevi (12) i (13) napisani su bez cijene proizvoda, jer je cijena proizvoda pozitivna, $p > 0$. Te zahtjeve sada možemo napisati u konačnim oblicima

$$f_{LL} < 0 \qquad (14)$$

i

$$f_{LL} f_{KK} - f_{LK}^2 > 0. \tag{15}$$

Oni imaju veoma zanimljivu ekonomsku interpretaciju. U skladu s uvjetom (14), $f_{LL} < 0$, poduzeće maksimira profit u području u kojem djeluje zakon opadajućih graničnih prinosa kada rad promatramo kao varijabilni faktor i kapital kao fiksni faktor proizvodnje. Taj uvjet i uvjet (15) podjedno nameću da poduzeće maksimira profit i tamo gdje djeluje zakon opadajućih graničnih prinosa kada kapital promatramo kao varijabilni faktor i rad kao fiksni faktor proizvodnje, $f_{KK} < 0$. Naime, kada je $f_{LL} < 0$, uvjet (15) može se, ali i ne mora, ostvariti samo onda kada je i $f_{KK} < 0$. Da bi se uvjet (15) ostvario zahtijeva se ne samo da djeluje zakon opadajućih graničnih prinosa na oba faktora proizvodnje, nego i da silina djelovanja toga zakona nadjača utjecaj povećanja jednoga faktora na granični proizvod drugoga faktora proizvodnje i obrnuto: $f_{LL} f_{KK} > f_{LK}^2$. Drugačije rečeno, kada rast graničnih troškova proizvodnje zbog djelovanja zakona opadajućih graničnih prinosa nadjača utjecaj promjene graničnih troškova zbog utjecaja povećanja rada na kapital i utjecaja povećanja kapitala na rad, poduzeće će tek tada ostvariti ravnotežu na rastućem dijelu krivulje graničnih troškova proizvodnje.

Da bismo pobliže objasnili o čemu je riječ, pretpostavimo da polazimo od položaja u kojem su granični proizvodi faktora proizvodnje jednaki realnim cijenama faktora i da pri zapošljavanju dodatne jedinice rada djeluje zakon opadajućih graničnih prinosa i da se zbog zapošljavanja dodatne jedinice rada povećava granični proizvod kapitala, $f_{KL} > 0$. Pretpostavimo dalje da je f_{KL} apsolutno veće od f_{LL} i da povećanje graničnog proizvoda kapitala uzrokuje da se u zakup uzme veliki broj dodatnih jedinica kapitala. Pri zapošljavanju tih dodatnih jedinica kapitala također djeluje zakon opadajućih prinosa, $f_{KK} < 0$. Pretpostavimo da je i pri zapošljavanju dodatne jedinice kapitala rast graničnog proizvoda rada, f_{LK}, takav da je f_{LK} apsolutno veće od f_{KK}. U opisanoj je situaciji konačan neposredan i posredan utjecaj zapošljavanja dodatne jedinice rada na granični doprinos faktora proizvodnje pozitivan. Stoga krivulja graničnih troškova u toj situaciji ima negativan nagib. Situacija se neće promijeniti sve dok dodatno zapošljavanje faktora proizvodnje ne dovede do toga da djelovanje zakona opadajućih graničnih prinosa ne nadjača međuutjecaje povećanja faktora na njihove granične proizvode i ne dovede do maksimalnog profita. U slučaju kada zapošljavanje dodatne jedinice rada uzrokuje smanjenje graničnog proizvoda kapitala, $f_{KL} = f_{LK} < 0$, i kada je $f_{KL} = f_{LK}$ apsolutno veće od f_{LL} i f_{KK}, analiza je slična. Ni tada nisu ispunjeni dovoljni uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita, iako djeluje zakon opadajućih prinosa na oba faktora proizvodnje. Stoga se mora povećavati upotreba rada i smanjivati upotreba kapitala sve dok zakon opadajućih graničnih prinosa ne nadjača međuutjecaje faktora na njihove granične proizvode i dok se ne maksimira profit poduzeća.

Pored navedenog tumačenja dovoljnih uvjeta drugoga reda za maksimizaciju profita, postoji još jedno zanimljivo tumačenje tih uvjeta. Iz (14) i (15) jasno proizlazi da su dovoljni uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita ekvivalentni dovoljnim uvjetima da funkcija proizvodnje bude striktno konkavna u vrlo maloj okolini kritične točke. Uz to je još važno uočiti da uvjeti drugoga reda za maksimizaciju profita nameću ograničenje na veličinu $f_{KL} = f_{LK}$ u odnosu na veličine f_{LL} i f_{KK}, ali ne i na predznak $f_{KL} = f_{LK}$.

Sada konačno možemo napisati funkciju ponude poduzeća i njegovu indirektnu funkciju ekonomskog profita. Funkcija ponude poduzeća glasi

$$\begin{aligned} y^* &= f\,[L(w, r, p), K(w, r, p)] \\ y^* &= y(w, r, p), \end{aligned} \tag{16}$$

a indirektna funkcija ekonomskog profita

$$\begin{aligned} \prod{}^* &= p\,f\left[L(w, r, p), K(w, r, p)\right] - w\,L(w, r, p) - r\,K(w, r, p) \\ \prod{}^* &= p\,y\,(w, r, p) - w\,L(w, r, p) - r\,K(w, r, p) \\ \prod{}^* &= \prod(w, r, p). \end{aligned} \tag{17}$$

Funkcija ponude poduzeća daje kritične količine proizvodnje koje maksimiraju profit za bilo koji zadani skup egzogenih varijabli (w, r, p), a indirektna funkcija ekonomskog profita daje maksimalan ekonomski profit poduzeća za bilo koji zadani skup egzogenih varijabli (w, r, p).

Dosadašnja analiza tek djelomično iscrpljuje analizu modela za maksimizaciju profita. Ona se obično nastavlja analizom traženja odgovora na pitanja kako poduzeće reagira na promjene egzogenih varijabli, ali se mi ovdje nećemo time baviti, jer smatramo da smo općeniti problem maksimizacije bez ograničenja jasno ilustrirali rješavanjem problema maksimizacije profita. To je i bio osnovni cilj našeg rada.

Zaključak

U skladu s nagovještenim ciljem članka – najjednostavnije objasniti optimizaciju neke funkcije s proizvoljnim brojem neovisnih varijabli bez ograničenja, bitno je prije svega shvatiti da je totalni diferencijal prvoga reda te funkcije u kritičnoj točki jednak nuli i da zbog toga vrijednost funkcije u toj točki, stacionarna vrijednost funkcije, časomično niti raste niti pada. Je li stacionarna vrijednost funkcije relativna maksimalna vrijednost ili relativna minimalna vrijednost funkcije, odnosno je li graf funkcije konkavan ili konveksan u vrlo maloj okolini stacionarne točke, zaključujemo na osnovi predznaka totalnog diferencijala drugoga reda u kritičnoj točki. Predznak se određuje tako da se totalni diferencijal drugoga reda zadane funkcije promatra kao kvadratna forma, zamišljajući diferencijale neovisnih varijabli kao neovisne varijable kvadratne forme. Pokazali smo da je matrica vrijednosti koeficijenata kvadratne forme u kritičnoj točki, Hesseova matrica ili matrica vrijednosti svih drugih derivacija zadane funkcije u kritičnoj točki, negativno definitna, odnosno da je vrijednost totalnog diferencijala drugoga reda u kritičnoj točki manja od nule, i da je u skladu s time stacionarna vrijednost funkcije relativna maksimalna vrijednost funkcije, kada vrijednosti vodećih glavnih minora te matrice mijenjaju predznak tako da su vrijednosti svih minora neparnoga reda manje od nule i vrijednosti svih minora parnoga reda veće od nule. Slično tome, zadana funkcija u kritičnoj točki ima relativnu minimalnu vrijednost kada su vrijednosti svih vodećih glavnih minora spomenute Hesseove matrice veće od nule, odnosno kada je ta matrica pozitivno definitna. Predznake vrijednosti svih glavnih minora Hesseove matrice moramo ispitivati zbog toga što stroga konkavnost (konveksnost) u potprostorima nižih dimenzija ne osigurava strogu konkavnost (konveksnost) u potprostorima većih dimenzija.

Primjenu optimizacije bez ograničenja ilustrirali smo na dva modela ekonomskog profita. U prvom se modelu polazi od pretpostavke da je već poznata funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova koja, pri zadanim cijenama faktora proizvodnje, izražava minimalne ekonomske troškove proizvodnje za bilo koju zadanu količinu proizvodnje. Stoga se problem maksimizacije ekonomskog profita u ovom slučaju svodi na problem izbora kritične količine proizvodnje koja maksimizira razliku između funkcije ukupnoga prihoda i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova proizvodnje. U drugom se modelu polazi od stajališta da funkcija proizvodnje izražava maksimalnu količinu proizvodnje za bilo koju zadanu kombinaciju faktora proizvodnje. Budući da izbor faktora proizvodnje određuje maksimalnu količinu proizvodnje za taj izbor i da su cijene faktora i cijena proizvoda zadane, problem se maksimizacije ekonomskog profita u ovom slučaju svodi na problem izbora kritičnih količina faktora proizvodnje koji maksimiraju razliku između ukupnog prihoda i ukupnih ekonomskih troškova faktora proizvodnje. Na putu traženja maksimalnog ekonomskog profita u skladu s dva opisana postupka nailazimo na tri važna nalaza i na originalan dokaz da polazeći od dva opisana modela ekonomskog profita dolazimo do jednakog maksimalnog ekonomskog profita, dokaz da se dovoljan uvjet drugoga reda za maksimizaciju profita u drugom pristupu svodi na zahtjev da funkcija proizvodnje u okolini kritične točke bude strogo konkavna i dokaz da je djelovanje zakona opadajućih prinosa nuždan, ali ne i dovoljan uvjet za maksimizaciju ekonomskog profita.

LITERATURA:

1. Apostol M. Tom (1974.). *Mathematical Analysis*. Second Edition, Addison Wesley.
2. Berge, Claude (1963.). *Topological Spaces*. Preveo E. M. Patterson, Edinburgh: Oliver and Boyd.
3. Blume, Lawrence i Simon, Carl (1994.). *Mathematics for Economists*, New York-London: W. W. Norton & Company.
4. Courant Richard i John Fritz (1999.). *Introduction to Calculus and Analysis*. Springer-Verlag.
5. Dixit, A. K. (1990.). *Optimization in Economic Theory*. Second Edition. New York: Oxford University Press.
6. Fuente, Angel de la (2000.). *Mathematical Methods and Models for Economists*. Cambridge: Cambridge University Press.
7. Geoffrey A. Jehle i Philip J. Reny (2001.). *Advanced Microeconomic Theory*. Second Edition. Addison Wesley Longman.
8. Madden, Paul (1986.). *Concavity and Optimization in Microeconomics*. London: Basil Blackwell.
9. Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston i Jerry R. Green (1995.). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
10. Silberberg, Eugene (1990.). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition. New York: McGraw-Hill Book Company.
11. Sydsaeter Knut i Hammond J. Peter (1995.). *Mathematics for Economic Analysis*. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall.
12. Widder V. David (1989.). *Advanced Calculus*. Second Edition. Reprint. Prvo objavljen: Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall.

FROM TOTAL DIFFERENTIAL TO MAXIMAL ECONOMIC PROFIT

Summary

The intention of this article is to explain in the most concise and simple way the optimization of the unconstrained function. This paper thus first explains the critical point term, the point in which the total differential of the function is equal to zero and in which the value of the function momentarily neither grows nor falls. After establishing the stationary point, sign of the second order differential, which takes the quadratic form, determines whether the function in the critical point has relative maximal or relative minimal value. If the Hessian matrix of such envisioned quadratic form in critical point is negative definite, then total second order differential in this point is less than zero and the function in the critical point has relative maximal value, and if that matrix is positive definite, then the function in critical point has relative minimal value. Special attention is given to the clarification that the matrix in question is negative definite when the values of its leading principal minors of odd order are less than zero and values of leading principal minors of even order are greater than zero, while the matrix is positively definite when values of all of the leading principal minors are greater than zero.

Unconstrained function optimization is applied to two economic profit models, on the model that is built on the assumption that the function of total minimal economic costs is known and on the model built on the assumption that the production function is known. In the former model the decision about critical production quantity that maximizes economic profit is being made, while in the latter model the decision about critical quantity of factors of production which maximize economic profit is being made. In the paper we prove that optimization of thus formulated models of economic profit lead to equal maximal economic profit.

Key words: total differential, stationary point, function's extreme value, concavity and convexity, quadratic form, Hessian matrix, positive/negative definite quadratic form, critical production quantity, critical production factors quantity, economic costs, economic profit.