*Ilko Vrankić**
*Jelena Vrbetić***

UDK 330.13
JEL Classification C61, D11
Stručni rad

TEOREM OVOJNICE U TEORIJI PONAŠANJA POTROŠAČA

U ovome radu optimizaciju uz ograničenja smještamo u kontekst učinkovite raspodjele ograničenog dohotka i izvodimo Marshallove funkcije potražnje i indirektnu funkciju korisnosti. Ispitivanjem svojstava indirektne funkcije korisnosti dolazimo do teorema ovojnice na koji se oslanjamo u komparativno-statičkoj analizi. Rezultati koje u okviru teorije ponašanja potrošača povezujemo s teoremom ovojnice imaju zanimljivo ekonomsko tumačenje i osnova su dualnog pristupa koji mukotrpno rješavanje sustava jednadžbi u izvođenju funkcija potražnje zamjenjuje lagodnijim operacijama deriviranja i dijeljenja.

Ključne riječi: učinkovita raspodjela ograničenog dohotka, komparativno-statička analiza, teorem ovojnice, Royov identitet, dualnost

1. Učinkovita raspodjela ograničenog dohotka

Pođimo od stajališta da je ukupna korisnost diferencijalno strogo rastuća i striktno kvazikonkavna funkcija količina dobara. Usmjerimo li pozornost na dobro koje nas uistinu zanima i potrošnju na sva ostala dobra, možemo se ograničiti na dva dobra. Potrošač za zadane cijene dobara - p_1 i p_2 dohodak - M odlučuje o količinama dobara koje kupuje - x_1 i x_2. Problem se učinkovite raspodjele

---

[*] I. Vrankić, dr. sc., viši asistent na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu

[**] J. Vrbetić, studentica na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Rad primljen u uredništvo: 21. 11. 2007.

ograničenog dohotka potrošača pretvara u problem maksimizacije korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje koje zapisujemo u obliku jednakosti, pa imamo slijedeći problem:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \quad u(x_1, x_2)$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M.$$

Iz analize možemo isključiti dobra koja potrošač ne kupuje, pa je prirodna pretpostavka o unutarnjem rješenju koja za dovoljno glatku funkciju korisnosti dopušta nesmetanu upotrebu diferencijalnog računa i metode Lagrangeovih množitelja. Lagrangeova je funkcija koju pridružujemo problemu optimizacije uz ograničenje

$$L(x_1, x_2, \lambda; p_1, p_2, M) = u(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Iz potrebnih uvjeta prvoga reda proizlazi sustav jednadžbi u kojem su nepoznanice količine dobara i Lagrangeov množitelj, λ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = u_1 - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = u_2 - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Plodovi rješavanja ovoga sustava, optimalne količine dobara koje potrošač kupuje i ravnotežna vrijednost Lagrangeovog multiplikatora ovise o ukusu potrošača, o cijenama i o dohotku:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^M (p_1, p_2, M) \\
x_2 &= x_2^M (p_1, p_2, M) \\
\lambda &= \lambda^M (p_1, p_2, M).
\end{aligned}$$

Na ovaj smo način izveli funkcije koje nam, za zadane cijene i dohodak, kazuju kolike količine pojedinih dobara potrošač kupuje. Nazivamo ih Marshallovim funkcijama potražnje i obilježavamo odgovarajućim indeksom - *M*, koji nosi i ravnotežna vrijednost Lagrangeovog multiplikatora. Ravnotežna vrijednost Lagrangeovog množitelja izražava dodatnu korisnost posljednje veoma male novčane jedinice izdane na bilo koje dobro,

$$\lambda^M = \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} > 0.$$

Cijene i dohodak na koje potrošač nema utjecaja na posredan način određuju i blagostanje potrošača funkcijom maksimalne korisnosti ili indirektnom funkcijom korisnosti

$$v(p_1, p_2, M) = u\left[x_1^M(p_1, p_2, M), x_2^M(p_1, p_2, M)\right].$$

Važnost ove funkcije moći ćemo pojasniti u odjeljcima koji slijede. Pritom će središnje mjesto zauzeti pitanje kako promjene cijena i dohotka utječu na promjenu maksimalne korisnosti.

2. Komparativno-statička analiza i teorem ovojnice

Promjene parametara u problemima optimizacije mijenjaju ravnotežu. Usporedbom različitih ravnotežnih stanja bavi se komparativno statička analiza. U tom okviru svoje mjesto zauzimaju teorem o maksimumu i teorem ovojnice. Teorem o maksimumu govori o neprekidnosti koju slikovito opisuje žaba na lopoču ustajale bare. Neznatno uznemirenje bačenog kamenčića ne poremeti mnogo sklad prirode, baš kao što ni u slučaju neprekidne funkcije mala promjena vrijednosti neovisne varijable ne dovodi do značajne promjene vrijednosti ovisne varijable. Stroga je formalizacija te slike izvan okvira ovoga rada i pozornost ćemo usmjeriti na teorem ovojnice, rezultat koje daje odgovor na pitanje: kolika je promjena funkcije maksimalne vrijednosti na veoma malu jedinicu promjene parametra? Do ovoga ćemo važnoga rezultata doći induktivno, komparativno-statičkom analizom blagostanja potrošača i indirektne funkcije korisnosti. Da saznamo kolika je promjena maksimalne korisnosti na veoma malu jedinicu promjene dohotka ili granična korisnost novca, promatramo razlomak $\frac{\partial v}{\partial M}$. U našoj analizi heurističke naravi poistovjećujemo diferencijal i stvarnu promjenu vrijednosti funkcije. Pravo da to učinimo daju nam veoma male promjene neovisnih varijabli u koje su se, u komparativno-statičkoj analizi preobrazili parametri. Poveća li se dohodak potrošača za jednu veoma malu jedinicu, mijenjaju se količine dobara koje potrošač kupuje za $\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$ i $\frac{\partial x_2^M}{\partial M}$. Promjene potrošnje pojedinih dobara mijenjaju blagostanje potrošača. Da bismo dobili učinak promjene potrošnje nekoga dobra na promjenu korisnosti, moramo pomnožiti promjenu korisnosti na veoma malu jedinicu promjene potrošnje dobra s promjenom potrošnje dobra,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1^M}{\partial M}, \qquad i=1,2.$$

Uzmemo li istodobno u obzir da promjena dohotka općenito utječe na promjene potrošnje svih dobara, zbrajanjem dobivamo veličinu je promjene maksimalne korisnosti na veoma malu jedinicu promjene dohotka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial M} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2^M}{\partial M},\\
\frac{\partial v}{\partial M} &= u_1\cdot\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+u_2\cdot\frac{\partial x_2^M}{\partial M},\\
\frac{\partial v}{\partial M} &= \left(\lambda^M p_1\right)\cdot\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+\left(\lambda^M p_2\right)\cdot\frac{\partial x_2^M}{\partial M},\\
\frac{\partial v}{\partial M} &= \lambda^M\left(p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\right).
\end{aligned}$$

U ovom smo računu iskoristili činjenicu da je dodatna korisnost dodatne jedinice dobra jednaka dodatnoj korisnosti novčanog iznosa kojim možemo kupiti jedinicu toga dobra:

$$u_i=\lambda^M p_i, \qquad i=1,2.$$

Prisjetimo li se da nezasitan potrošač troši čitav dohodak, otkrivamo da za Marshallove funkcije potražnje vrijedi jednakost koja izražava ravnotežu između ukupnih izdataka i ograničenog dohotka:

$$p_1x_1^M+p_2x_2^M=M.$$

Iz te jednakosti promatranjem promjena lijeve i desne strane na malu jedinicu promjene dohotka ili totalnih derivacija (Chiang, 2005.) po dohotku proizlazi da je ukupna promjena izdataka jednaka promjeni dohotka

$$p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}=1.$$

Na osnovi te spoznaje možemo završiti račun koji daje odgovor na pitanje kolika je promjena maksimalne korisnosti na veoma malu jedinicu promjene dohotka i ponovo protumačiti ravnotežnu vrijednost Lagrangeovog multiplikatora kao graničnu korisnost novca

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \lambda^M > 0.$$

Pozitivan predznak granične korisnosti novca potvrđuje intuiciju da je potrošaču bolje kada mu se poveća dohodak. Važno je, međutim, primijetiti da smo do prethodnoga rezultata mogli doći i derivacijom Lagrangeove funkcije u ravnoteži:

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \left.\frac{\partial L}{\partial M}\right|_{(x_1^M, x_2^M, \lambda^M)}.$$

Taj važan rezultat vrijedi i izvan okvira teorije ponašanja potrošača. U literaturi je poznat pod nazivom teorem ovojnice (Jehle, 1998.).

Teorem. *Pretpostavimo da su u problemu optimizacije*

$$M(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{x} \geq 0} f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$$
$$g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$$

funkcija cilja i ograničenje neprekidno diferencijabilni u parametrima $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$*. Za svaki* $\mathbf{a}$ *neka je* $\mathbf{x}(\mathbf{a}) >> 0$ *jedinstveno i neprekidno diferencijabilno rješenje u parametrima. Tada je promjena funkcije maksimalne vrijednosti na veoma malu jedinicu promjene parametra jednaka promjeni Lagrangeove funkcije na veoma malu jedinicu promjene toga parametra u odgovarajućoj kritičnoj točki,*

$$\frac{\partial M(\mathbf{a})}{\partial a_j} = \left.\frac{\partial L}{\partial a_j}\right|_{(\mathbf{x}(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a}))}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Primjećujemo da je teorem ovojnice rezultat značajan za komparativno-statičku analizu koji znatno olakšava računanje časomičnih stopa promjene funkcije maksimalne vrijednosti. Analiza indirektne funkcije korisnosti otkriva da se u pozadini toga računa kriju teorem o derivabilnosti kompozicije i potrebni uvjeti prvoga reda. Nadamo se da su rezultati do kojih smo došli u modelu maksimizacije korisnosti uz budžetsko ograničenje dostatni čitatelju da dokaže teorem ovojnice u općem okviru i da se uvjeri da je teorija ponašanja potrošača stvarni putokaz koji usmjerava naše napore prema izučavanju još općenitijih problema od problema izbora potrošača.

3. Royov identitet i dualnost

U prošlom smo se odjeljku bavili analizom utjecaja promjene dohotka na blagostanje potrošača. Na osnovi teorema ovojnice do kojeg smo došli relativno velikom lakoćom možemo ispitati kako na potrošača utječu promjene cijena dobara. Naime, promjena je maksimalne korisnosti potrošača na veoma malu jedinicu promjene cijene dobra jednaka parcijalnoj derivaciji Lagrangeove funkcije po cijeni toga dobra u odgovarajućoj kritičnoj točki:

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial L}{\partial p_i}\right|_{(x_1^M, x_2^M, \lambda^M)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -\lambda^M x_i^M < 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Primjećujemo da negativan predznak razlomka $\frac{\partial v}{\partial p_i}$ potvrđuje intuiciju da povećanje cijena umanjuje blagostanje potrošača.

Nadamo se da smo dosadašnjom analizom čitatelja dovoljno ohrabrili da potvrdi prethodne nalaze bez izravnog oslanjanja na teorem ovojnice. Iz izraza koji proizlaze iz teorema ovojnice i opisuju utjecaje promjena cijena i dohotka na maksimalnu korisnost

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -\lambda^M x_i^M, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \lambda^M,$$

izvodimo još jedan važan rezultat koji nazivamo Royovim identitetom

$$x_i^M = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v}{\partial M}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Taj važan rezultat dualnosti omogućuje da Marshallove funkcije potražnje izvedemo na drugi način, polazeći od indirektne funkcije korisnosti. U tom slučaju mukotrpno rješavanje sustava jednadžbi zamjenjuju lagodnije operacije deriviranja i dijeljenja.

Da dosadašnja razmatranja ne bi ostala samo mrtvo slovo na papiru, ilustrirat ćemo ih numeričkim primjerom. U nadi da ćemo time konačno doprijeti do čitatelja, pođimo od CES funkcije korisnosti

$$u(x_1,x_2)=\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi koji proizlazi iz potrebnih uvjeta prvoga reda maksimizacije korisnosti uz budžetsko ograničenje

$$\begin{aligned}&\left(x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{1}{2}}\right)x_1^{-\frac{1}{2}}-\lambda p_1=0\\&\left(x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{1}{2}}\right)x_2^{-\frac{1}{2}}-\lambda p_2=0\,,\\&M-p_1x_1-p_2x_2=0\end{aligned}$$

izvodimo Marshallove funkcije potražnje

$$\begin{aligned}x_1^M(p_1,p_2,M)&=\frac{p_2M}{p_1\left(p_1+p_2\right)}\quad,\\x_2^M(p_1,p_2,M)&=\frac{p_1M}{p_2\left(p_1+p_2\right)}\end{aligned}$$

i indirektnu funkciju korisnosti

$$v(p_1,p_2,M)=\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)M.$$

Da stvarno spozna težinu rezultata ovoga rada, pozivamo čitatelja da Marshallove funkcije potražnje izvede iz indirektne funkcije korisnosti. Na tom se putu lako može uvjeriti koju ulogu u teoriji ponašanja potrošača imaju teorem ovojnice i Royov identitet.

4. Zaključak

Teorem ovojnice na koji se oslanjamo u komparativno-statičkoj analizi u sebi krije teorem o derivabilnosti kompozicije i potrebne uvjete prvoga reda optimizacije uz ograničenja. Optimizaciju smještamo u kontekst efikasne raspodjele ograničenog dohotka i na induktivan način izvodimo rezulate koji opisuju utjecaj promjena parametara na funkciju maksimalne korisnosti. Teorija ponašanja potrošača tako postaje stvarni putokaz koji usmjerava naše napore prema izučavanju još općenitijih problema od problema izbora potrošača. U konkretnom se okviru ostvaruju opća tumačenja rezultata koje povezujemo s teorijom ovojnice i na koje se oslanjamo u izvođenju Marshallovih funkcija potražnje na drugi način. Taj dualni pristup znatno olakšava računanje u kojem rješavanje sustava jednadžbi zamjenjujemo jednostavnijim operacijama deriviranja i dijeljenja. Rezultate do kojih smo došli ilustrirali smo i numeričkim primjerom koji sasvim jasno opisuje ulogu teorema ovojnice u teoriji ponašanja potrošača.

LITERATURA

1. Blume, L., Simon, C. (1994.). *Mathematics for Economists*, New York-London: W. W. Norton & Company.
2. Chiang, A. C. (1994.). *Osnovne metode matematičke ekonomije*. Treće izdanje. Zagreb: Mate.
3. Courant, R., Fritz, J. (1999.). *Introduction to Calculus and Analysis*, Springer-Verlag.
4. Dixit, A. K. (1990.). *Optimization in Economic Theory*. Second Edition. New York: Oxford University Press.
5. Jehle, G. A., Reny, P. J. (1998.). *Advanced Microeconomic Theory*. Addison Wesley Longman.
6. Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R. (1995.). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
7. Silberberg, E. (1990.). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition. New York: McGraw-Hill Book Company.

THE ENVELOPE THEOREM IN CONSUMER THEORY

Summary

In this paper we consider the constrained optimization in the context of efficient distribution of income and derive the Marshallian demand functions as well as the indirect utility function. By observing the properties of the indirect utility function, we derive the envelope theorem which makes the basis of comparative statics. Within the framework of the consumer theory, the results are closely related to the envelope theorem and have interesting economic meaning. Furthermore, they make the foundation of the dual approach which replaces difficult to solve system of equations with easier operations of derivation and division.

Key words: efficient distribution of income, comparative statics, the envelope theorem, Roy's identity, duality